DÉVELOPPEMENTS POUR L'AGREG

MICKAËL CRAMPON

Je donne ici quelques idées qui peuvent faire des développements assez originaux. Lorsqu'il y en a, je donne les références. Je propose parfois des conseils, des compléments ou des modifications de preuve, qui n'engagent que moi. Je conseille les papiers de mes chers collègues Benjamin Favetto ([9]) et Vincent Pit ([16]) en compléments de celui-ci.

Table des matières

1. Le groupe circulaire

Définition 1.1. *Le groupe circulaire est le groupe* $\mathbf{G}$ *engendré par les homographies et la conjugaison complexe.*

Théorème 1.2. *Le groupe circulaire est exactement l'ensemble des transformations préservant les cercles de* $\mathbb{S}^2$.

Preuve : (la référence est [3] p.204-205. Mais je propose ici une simplification de la preuve.)

Les homographies, puisqu'elles préservent le birapport, et la conjugaison préservent les cercles de $\mathbb{S}^2$, donc les éléments de $\mathbf{G}$ aussi. Il s'agit de montrer la réciproque.

Soit donc f une transformation de $\mathbb{S}^2$ préservant les cercles.

Lemme 1.3. f *préserve les divisions harmoniques.*

On va montrer que le quatrième harmonique peut être construit grâce à des cercles à partir des trois premiers points. Cette construction sera conservée par f, et le résultat sera établi.
Soient donc $a, b, c \in \mathbb{S}^2$, deux à deux distincts, et $\mathcal{C}$ le cercle passant par a, b, c. On projette sur un plan affine (réel) en choisissant le point ∞ sur $\mathcal{C}$ mais qu'on suppose distinct de a, b, c. Le cercle $\mathcal{C}$ se projette en une droite. Le point d tel que $[a, b, c, d] = -1$ est déterminé par la construction de la figure de gauche de la figure 15.
Elle peut facilement s'expliquer en plongeant le plan dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Il suffit alors d'envoyer la droite $\mathcal{C}$ à l'infini pour obtenir la figure de droite, et là c'est clair puisque $[a, b, c, \infty] = -1$ ssi c est le milieu de $[ab]$.

□

Lemme 1.4. *Soient* $\mathbf{k}$ *un corps de caractéristique différente de 2 et* f *une homographie de* $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ *telle que* $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(\infty) = \infty$.
Si f *préserve les divisions harmoniques, alors* f *est un automorphisme de corps de* $\mathbf{k}$.

En particulier, si $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, f est donc soit l'identité soit la conjugaison. On renvoie à [3] p.205 pour la preuve.

□

La preuve du théorème est alors claire. En composant avec une homographie, on se ramène au cas où f vérifie $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(\infty) = \infty$. Les deux lemmes précédents permettent de conclure que $f \in \mathbf{G}$.

□

Leçons :
- Homographies de la droite complexe ;
- Exemples d'utilisation de propriétés projectives et d'éléments à l'infini ;
- Applications des nombres complexes à la géométrie.

2. Dual d'un convexe

On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ contenant 0.

Définition 2.1. *Le dual C^* d'un élément $C \in \mathcal{C}$ est l'ensemble*
$$\{x \in \mathbb{R}^n / \ \forall y \in C, \ \langle x, y \rangle \leq 1\}.$$

Lemme 2.2. *Soient $C \in \mathcal{C}$ et $a \notin C$. Alors peut séparer strictement a et C par un hyperplan de la forme*
$$H_a = \{x \in \mathbb{R}^n / \ \langle u(a), x \rangle = 1\},$$
avec $u(a) \in \mathbb{R}^n$.

Preuve : Soient $p(a)$ la projection de a sur C et H l'hyperplan médiateur de a et C, d'équation $\langle x - \frac{p(a)+a}{2}, a - p(a) \rangle = 0$. Celui-ci sépare bien strictement a et C et
$$x \in H \Longleftrightarrow \langle x, a - p(a) \rangle = \langle \frac{p(a)+a}{2}, a - p(a) \rangle = \frac{1}{2}(\|a\|^2 - \|p(a)\|^2),$$
quantité > 0 car $0 \in C$ et $a \notin C$. Posant
$$u(a) = \frac{2}{\|a\|^2 - \|p(a)\|^2}(a - p(a)),$$
on obtient le résultat.

□

Proposition 2.3. *L'application $C \longmapsto C^*$ est une involution de $\mathcal{C}$ renversant les inclusions.*

Preuve : L'application est clairement définie de $\mathcal{C}$ dans lui-même et renverse les inclusions. Montrons que c'est une involution, ie que $(C^*)^* = C$ pour $C \in \mathcal{C}$.

- $(C^*)^* \supset C$: si $x \in C$ alors $\forall y \in C^*, \ \langle x, y \rangle \leq 1$ et donc $x \in (C^*)^*$.
- $(C^*)^* \subset C$: on montre que $C^c \subset ((C^*)^*)^c$. Si $a \notin C$ alors, en séparant x et C par l'hyperplan H_a du lemme, on a
$$\forall x \in C, \ \langle u(a), x \rangle \leq 1.$$
Ainsi, $u(a) \in C^*$. Comme $a \notin C, \langle u(a), a \rangle > 1$ et finalement $a \notin ((C^*)^*)$.

□

Remarque : Cette application induit aussi une involution de l'ensemble
$$\mathcal{C}_0 = \{C \in \mathcal{C} / \ C \text{ compact}, 0 \in C\}.$$

Exemple 2.4. *Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre régulier de $\mathbb{R}^3$ de centre O. Notons $M_1, ..., M_s$ les centres de ses s faces et $\mathcal{P}'$ l'enveloppe convexe des $(M_i)_{i=1..s}$. Si $OM_1 = 1$, alors $\mathcal{P}^* = \mathcal{P}'$.*

Preuve : $\mathcal{P} = \{M \in \mathbb{R}^3 / \ \forall i, \langle \vec{OM}, \vec{OM_i} \rangle \leq 1\}$, et donc $\mathcal{P}^* \supset \mathcal{P}'$. Réciproquement, $\mathcal{P}^* \subset \mathcal{P}'$ car $\mathcal{P} = (\mathcal{P}^*)^* \supset (\mathcal{P}')^*$. En effet, si $M \in (\mathcal{P}')^*$, alors $\forall N \in \mathcal{P}', \langle \vec{OM}, \vec{ON} \rangle \leq 1$. En particulier, $\forall i, \langle \vec{OM}, \vec{OM_i} \rangle \leq 1$ et donc $\in \mathcal{P}$.

□

Le dual du tétraèdre est lui-même, le dual du cube est l'octaèdre et celui du dodécaèdre est l'icosaèdre.

Remarque : si $u \in GL(\mathbb{R}^n)$ et $C \in \mathcal{C}$, alors $(u(C))^* = (u^*)^{-1}(C^*)$. Ainsi, si $u \in O(\mathbb{R}^n)$, alors $(u(C))^* = u(C^*)$, et donc C et C^* ont même groupe d'isométries.

Leçons :
- Formes linéaires et hyperplans en dimension finie ;
- Barycentre et convexité en dimension finie.

3. Anneaux d'entiers quadratiques

On se reportera à [2] et surtout à [11] pour les résultats énoncés sans démonstration.

On s'intéresse aux anneaux d'entiers des anneaux $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ pour d entier non nul sans facteur carré, Il s'agit de l'anneau A_d des éléments dont la norme est entière :

$$A_d = \{z = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}[\sqrt{d}] \ / \ N(z) = a^2 + b^2 \in \mathbb{Z}\}.$$

On montre que $A_d = \mathbb{Z}[\omega]$ avec $\omega = \sqrt{d}$ si $d \equiv 2$ ou $3 \bmod 4$, $\omega = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ si $d \equiv 1 \bmod 4$.
Dans [11], on détermine selon la valeur de l'entier d si A_d est euclidien, principal ou pas. Je montre ici l'équivalence entre principal et factoriel pour ces anneaux, ce qui est valable dans un cadre plus général (anneaux de Dedekind).

Proposition 3.1. *A_d est principal si et seulement si A_d est factoriel.*

Preuve : On fixe d et on note $A = A_d$. En trois temps :
1. Les idéaux premiers non nuls de A sont maximaux.
Soit I un idéal premier non nul de A. A est un $\mathbb{Z}$-module de base $(1, \omega)$, et I en est un sous-module. Par le théorème de la base adaptée, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a|b$ ou $b|a$ et tel que $(a, b\omega)$ engendre I comme $\mathbb{Z}$-module. De plus, a et b sont non nuls car I est non nul. Ainsi,

$$A/I \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}.$$

En particulier, A/I est fini. I étant premier, A/I est de plus intégre. Finalemnt A/I est un corps et I est maximal.

2. Les idéaux premiers de A sont principaux.
Si $I = (0)$, alors I est principal.
Sinon, il existe $x \in I$ non nul, qu'on écrit dans A, factoriel, $x = p_1 \cdots p_n$ avec $p_1, \cdots, p_n$ premiers dans A. Comme I est premier, l'un des p_i est dans I, disons p_1. Ainsi, $(p_1) \subset I$. Mais (p_1) est un idéal premier non nul donc maximal et donc $I = (p_1)$ et I est principal.

3. A est principal.
Soit I un idéal de A. I est de type fini, engendré par moins de deux éléments, puisqu'il l'est déjà comme $\mathbb{Z}$-module. Supposons $I = (a, b)$. A étant factoriel, on peut considérer le pgcd k de a et b. On écrit $a = ka', b = kb'$ et ainsi, $I = k(a', b')$.
En fait, $I = (k)$ car $(a', b') = A$: sinon, (a', b') est inclus dans un idéal maximal $M = (p)$ avec p premier dans A. On a alors $p|a'$ et $p|b'$, d'où une contradiction puisque a' et b' sont premiers entre eux.

$\square$

Leçons :
- Anneaux principaux;
- Exemples d'applications des idéaux d'un anneau commutatif unitaire.

4. Nombre de sous-espaces stables

Voici une jolie application de la vision $\mathbf{k}[X]$-module en algèbre linéaire. Cela répond à une question qui semble fréquemment posée par le jury.

Proposition 4.1. *Soient* $\mathbf{k}$ *un corps infini,* E *un* $\mathbf{k}$*-espace vectoriel de dimension finie* n*, et* $u \in \mathcal{L}(E)$*. Alors le nombre de sous-espaces* u*-stables est fini si et seulement si* E *est* u*-cyclique.*

Preuve : 1. On traduit d'abord le problème en termes de modules.
Le polynôme minimal π_u de u annule u, et donc annule le $\mathbf{k}[X]$-module E. Ainsi, la structure de $\mathbf{k}[X]$-module de E est équivalente à une structure de $\mathbf{k}[X]/(\pi_u)$-module. Les sous-espaces u-stables s'identifient aux sous-$\mathbf{k}[X]/(\pi_u)$-modules.
Pour $x \in E$, l'application $\alpha_x : \overline{P} \mapsto P(u)(x)$ est $\mathbf{k}[X]/(\pi_u)$-linéaire de $\mathbf{k}[X]/(\pi_u)$ dans E. Dire que E est u-cyclique, c'est dire qu'il existe $x \in E$ tel que α_x soit surjective. Mais dans ce cas-là, α_x est un isomorphisme car le noyau du $\mathbf{k}[X]$-morphisme $P \mapsto P(u)(x)$ de $\mathbf{k}[X]$ dans E est alors exactement (π_u).

2. Il s'agit donc de prouver que E a un nombre fini de sous-$\mathbf{k}[X]/(\pi_u)$-modules ssi il existe x tel que α_x soit un isomorphisme.
$\Leftarrow$: Soit x tel que α_x soit un isomorphisme. Via α_x, les sous-$\mathbf{k}[X]/(\pi_u)$-modules de E s'identifient aux idéaux de $\mathbf{k}[X]/(\pi_u)$, qui s'identifient eux-mêmes aux idéaux de $\mathbf{k}[X]$ contenant π_u, ie, comme $\mathbf{k}[X]$ est principal, aux idéaux (P) de $\mathbf{k}[X]$ où P divise π_u. Ceux-ci sont en nombre fini.
$\Rightarrow$: Notons $F_1, ..., F_s$ les sous-espaces u-stables non triviaux de E. Comme $\mathbf{k}$ est infini, d'après le lemme d'évitement (cf [12]), il existe $x \in E \setminus \cup_{i=1..s} F_i$. $\mathrm{Im}(\alpha_x)$ est un sous-module de E, distinct de $\{0\}$ et des $(F_i)_{i=1..s}$, donc c'est E. Ainsi, α_x est surjective.

□

Leçons :
- Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un ev de dimension finie ;
- Exemples d'application des idéaux d'un anneau commutatif unitaire ;
- *(Anneaux principaux).*

5. Équirépartition modulo 1

Il s'agit de montrer le résultat suivant, connu sous le nom de critère de Weyl :

Théorème 5.1. *Soit (x_k) une suite de $\mathbf{S}^1$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *la suite (x_k) est équirépartie ;*

(2) $\forall f \in \mathcal{C}(\mathbf{S}^1), \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_{S^1} f(x)\ dx$;

(3) $\forall l \in \mathbb{Z}^*, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \exp(2i\pi l x_k) = 0$.

Preuve : (2) $\Rightarrow$ (3) est trivial. (3) $\Rightarrow$ (2) et (1) $\Rightarrow$ (2) découlent du lemme suivant, appliqué avec $F = \{$polynômes trigonométriques$\}$, puis $F = \{$fonctions en escalier$\}$, grâce aux théorèmes de Weierstrass et de Heine. Ce lemme est très simple : c'est une inégalité triangulaire.

Lemme 5.2. *Soit F un ensemble de fonctions bornées sur $\mathbf{S}^1$ tel que*

$$\forall f \in F, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_k) = \int_{\mathbb{S}^1} f(x)\ dx.$$

Alors l'égalité reste vraie pour toute fonction de $\overline{F}^{\|\cdot\|_\infty}$.

Enfin, (2) $\Rightarrow$ (1) se fait en approchant l'indicatrice d'un "intervalle" de $\mathbf{S}^1$ par des fonctions continues. On se reportera à [6].

□

Exemples : 1. L'exemple classique de suite équirépartie est la suite $(\exp(2i\pi(x+n\alpha))_{n\geq 0}$ pour $x \in \mathbb{R}$, où α est irrationnel. Elle correspond à l'orbite du point $\exp(2i\pi x)$ sous l'action du groupe engendré par la rotation d'angle $2\pi\alpha$. On en déduit par projection que les suites $(\sin(2\pi(x+n\alpha))_{n\geq 0}$ et $(\cos(2\pi(x+n\alpha))_{n\geq 0}$ ne sont pas équiréparties modulo 1.

2. La suite $(\ln n)_{n\geq 1}$ n'est pas équirépartie modulo 1. C'est une application de la formule d'Euler Mc-Laurin à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \exp(2i\pi\ln(k)) &= \frac{1+\exp(2i\pi\ln(n))}{2n} + \frac{1}{n}\int_1^n \exp(2i\pi\ln(x))\ dx \\ &\quad + \frac{1}{n}\int_1^n B_1(x)\frac{2i\pi l}{x}\exp(2i\pi\ln(x))\ dx.\end{aligned}$$

On vérifie que les termes extrémaux tendent vers 0, mais pas le second, et on conclut grâce au théorème.

Remarque : On travaille indifféremment dans $\mathbf{S}^1$ ou $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, et avec $\mathcal{C}(\mathbf{S}^1)$ ou l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ 1-périodiques. Il faut faire un peu attention et être clair là-dessus.

Leçons :
- Exemples de parties denses et applications ;
- Comportement asymptotique des suites numériques. Exemples et applications ;
- Convergence des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.

6. Théorème ergodique de Von Neumann. Applications

Le théorème est le suivant :

Théorème 6.1. *Soient $\mathcal{H}$ un Hilbert et $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ linéaire tel que $\|T\| \leq 1$. Alors*

$$\forall x \in \mathcal{H}, \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} T^n(x) = P(x),$$

où P est la projection orthogonale sur Ker(Id-T).

On se reportera à [5] pour une preuve simple. Une preuve différente mais plus longue est donnée dans [17].

Applications : Voici deux exemples simples où on peut utiliser ce théorème. Ils donnent de jolies applications des séries de Fourier dans $L^2(\mathbb{T})$, où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(1) On considère l'application r_α de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{T}$, définie par :

$$r_\alpha : x \longmapsto x + \alpha \text{ mod } 1, \text{ pour } \alpha \in [0, 1[.$$

Puis l'application correspondante de $L^2(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$:

$$T_\alpha : f \longmapsto T_\alpha f = f \circ r_\alpha.$$

Conformément au théorème, on s'intéresse à Ker(Id-T_α). Or,

$$\begin{aligned} f \in \text{Ker}(\text{Id} - T_\alpha) &\iff f = T_\alpha f \\ &\iff \forall n \in \mathbb{Z}, \ \hat{f}(n) = \widehat{T_\alpha f}(n) = e^{2i\pi n\alpha} \hat{f}(n) \\ &\iff \forall n \in \mathbb{Z}, \ n\alpha \notin \mathbb{Z}, \ \hat{f}(n) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a deux cas à distinguer :
- soit α est irrationel et alors Ker(Id-T_α) est l'ensemble des fonctions constantes ;
- soit $\alpha = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}^*$, et alors Ker(Id-$T_\alpha$) $= \overline{\text{vect}(e_{nq}, n \in \mathbb{Z})}^{L^2(\mathbb{T})}$.

(2) On fait de même avec les applications :

$$t_m : x \longmapsto mx \text{ mod } 1, \text{ pour } m \in \mathbb{N}^*.$$

$$T_m : f \longmapsto T_m f = f \circ t_m;$$

et on cherche à déterminer Ker(Id-T_m). On a toujours

$$f \in \text{Ker}(\text{Id} - T_m) \Leftrightarrow \ \forall n \in \mathbb{Z}, \ \hat{f}(n) = \widehat{T_m f}(n).$$

On remarque que $\widehat{T_m f}(km) = \hat{f}(k)$ pour tout $k \in Z$. Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{Z}^*, \ \forall i \in \mathbb{N}, \ \hat{f}(k) = \hat{f}(m^i k) \longrightarrow 0$$

quand $i \to \infty$, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue. Ainsi, Ker(Id-T_m) est l'ensemble des fonctions constantes.

On peut maintenant appliquer le théorème de Von-Neumann dans $L^2(\mathbb{T})$ à T_α et T_m.

Leçons :
- Applications linéaires continues entre evn. Exemples et applications ;
- Méthodes hilbertiennes en dim finie et infinie.

7. Nombre de rotation

L'énoncé tel que je le proposais est le suivant :

Théorème 7.1. *Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, strictement croissante, et telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x+1) = F(x) + 1$. Alors*

(1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \rho(F) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(F^n(x) - x)$ *existe et ne dépend pas du point x choisi ;*

(2) $\rho(F) \in \mathbb{Q}$ *ssi il existe un point x périodique, ie tel que $F^q(x) = x + p$ pour un couple $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.*

La preuve est dans [5] et est plutôt simple. Les hypothèses faites sur F permettent d'en déduire un homéomorphisme f du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ en passant au quotient. D'où l'appellation "nombre de rotation" pour $\rho(F)$, et le qualificatif "périodique". Inversement, d'un homéomorphisme du cercle, on en déduit une application F (un relèvement) vérifiant les conditions du théorème.
Il peut être utile de lire la suite du chapitre de [5] en diagonale ; en particulier, notons que sous certaines hypothèses (qu'on gardera obscures), le système dynamique $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, f)$ est conjugué au système $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, r_{\rho(F)})$ où $r_{\rho(F)}$ est la rotation d'angle $\rho(F)$, c'est à dire en gros que d'un point de vue topologique, ce sont les mêmes. D'où l'importance de savoir si $\rho(F)$ est rationnel ou pas.

Leçons :
- Comportement asymptotique des suites numériques. Exemples et applications ;
- Convergence des suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples ;
- Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$;
- Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

8. Théorème d'échantillonage de Shannon

J'énonçais le théorème sous cette forme :

Théorème 8.1. *Soit* $BL^2 = \{u \in L^2(\mathbb{R}) /\ \hat{u}$ *est à support dans* $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$. *Alors*

(1) BL^2 *est un Hilbert ;*

(2) $u \in BL^2$ *a un représentant continu qui est même analytique ;*

(3) *Notons* $\epsilon_n : x \mapsto sin(\pi(x-n)/(\pi(x-n)$ *pour* $n \in \mathbb{Z}$. *Alors* $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une base hilbertienne de* BL^2. *De plus, si* $u \in BL^2$ *alors* $u = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u(n)\epsilon_n$. *La convergence est* L^2, *et aussi uniforme.*

Preuve : la preuve se trouve dans [17], mais je pense qu'elle est à retravailler.

(1) On montre que BL^2 est un sev fermé de $L^2(\mathbb{R})$.

(2) Si $u \in BL^2$, alors $\hat{u}$ est dans $L^2(\mathbb{R})$ et à support compact, donc dans $L^1(\mathbb{R})$. D'après la formule d'inversion de Fourier, $\check{\hat{u}}$ donne un représentant continu de u.
Pour montrer que ce représentant est analytique, il suffit d'écrire la formule d'inversion de Fourier. Invoquer alors le théorème d'holomorphie sous l'intégrale. Sinon, écrire $e^{2i\pi x\xi}$ comme sa série et utiliser le théorème de convergence dominée.

(3) Pour la convergence L^2, il suffit de voir que $\langle u, \epsilon_n\rangle = u(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$. La convergence uniforme vient alors de la formule d'inversion qui amène $\|u\|_\infty \leq \|u\|_1 \leq \|u\|_2$.

□

Il est important de comprendre que quand on parle de $u(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, il s'agit de l'évaluation du représentant continu de u en n. Cela n'aurait aucun sens sinon.
On peut montrer aussi qu'on a convergence uniforme des séries des dérivées dans (3), ie :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} \| \sum_{p=-n}^{n} u(n)\epsilon_n^{(k)} = u^{(k)}\|_\infty = 0.$$

Il suffit pour cela de dériver dans la formule d'inversion pour obtenir $\|u^{(k)}\|_\infty \leq \pi^k \|u\|_2$. Le résultat vient alors de la convergence L^2.

Leçons :
- Espaces de fonctions ;
- Espaces complets. Exemples et applications ;
- Bases hilbertiennes. Exemples et applications ;
- Espaces L^p ;
- Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.

9. Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d, d \geq 1$

La marche aléatoire est récurrente en dimension 2 et 3, transciente en dimension supérieure.
La preuve proposée dans [4] est basée sur le critère de récurrence/transcience suivant, issu de la théorie des chaînes de Markov : la marche aléatoire (X_n) est récurrente si et seulement si $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[X_n = 0|X_0 = 0] = +\infty$. Il faut être au clair là-dessus et avoir des éléments de preuve.

Toutefois, on peut faire sans ce critère si on se contente de prouver la transcience en dimension ≥ 3 : il suffit alors d'invoquer le lemme de Borel-Cantelli qui nous assure que, si $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[X_n = 0|X_0 = 0] < +\infty$, alors la probabilité que la chaîne reviennne en 0 une infinité de fois est nulle, ce qui équivaut à la transcience. Au pire, vous aurez des questions sur le cas $d \leq 3$, mais les chaînes de Markov n'étant pas au programme, pas de souci.
Sinon, le papier de Vincent Pit ([16]) donne une preuve élémentaire du critère précédent dans les cas des marches aléatoires.

Le preuve illustre à merveille les théorèmes de convergence pour les intégrales. Le développement se replace dans "Utilisation de la dénombrabilité" si on fait une partie sur les chaînes de Markov à espace d'état dénombrable.
Si vous n'aimez pas les livres de probas, sachez que la même preuve, moins détaillée, se trouve aussi dans [8].

Leçons :
- Pile ou face ;
- Interversion limite/intégrale ;
- Problèmes d'interversion de limites.

10. Géométrie différentielle

Les leçons de géométrie différentielle sont souvent peu prisées car un peu en marge du programme. Voici quelques idées.

10.1. **Théorème fondamental de la théorie des courbes.** On montre que la donnée de la courbure et de la torsion détermine une courbe de $\mathbb{R}^3$, unique à isométrie près. La preuve est très bien faite dans [7] p. ? ; elle illustre joliment le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire et les formules de Frénet, sur lesquels, bien sûr, il faut être au point. Selon les gens, elle peut être un peu courte. On peut proposer en plus un exemple (je faisais la spirale logarithmique : torsion nulle et courbure $= 1/t$) ou traiter le cas "général" des surfaces planes i.e. de torsion nulle.

Leçons :
- Courbes.
- Equations différentielles linéaires.

10.2. **Sous-variétés connexes de dimension 1 de $\mathbb{R}^n$.** Il s'agit de montrer qu'à difféomorphisme près, les seules sous-variétés connexes de dimension 1 de $\mathbb{R}^n$ sont $\mathbb{R}$ et le cercle. Ma référence est la fin de [14], mais on peut aussi trouver la preuve dans [6].
Ce n'est pas un développement facile : la preuve est longue et fait appel à des concepts hors programme. On parle de difféo entre sous-variétés, et de différentielles d'applications entre sous-variétés. Pour être au clair sur ces notions, [7] est un bon bouquin.

Leçons :
- Courbes.
- Connexité.
- Prolongement de fonctions.

Les deux développements suivants font appel à un certain bagage théorique sur les surfaces : application de Gauss, deuxième forme fondamentale... Ici encore, [7] est une très bonne référence. Ce ne sont pas des résultats qui s'improvisent.

10.3. **Géodésiques d'une surface de révolution.** Il s'agit de déterminer toutes les géodésiques d'une surface de révolution. La preuve est très bien dans [15] p.182 à 185. Elle est basée sur les équations des géodésiques tracées sur une surface qu'on trouve dans [15] ou [7]. On régle d'abord le cas des parallèles et des méridiens. Le théorème de Clairault permet de déterminer les autres géodésiques. Il peut être utile de savoir appliquer le résultat à des surfaces simples.

Leçons :
- Courbes.
- Étude locale de surfaces.

10.4. **Deux résultats sur les surfaces.** Voici deux résultats qui permettraient à terme de prouver que les seules surfaces compactes, connexes, orientables, de courbure gaussienne constante, sont les sphères.

Proposition 10.1. *Une surface connexe orientable dont tous les points sont des ombilics est un ouvert d'un plan ou d'une sphère.*

Proposition 10.2. *Si $\mathcal{S}$ est une surface compacte connexe orientable, alors il existe un point $M \in \mathcal{S}$ où la courbure gaussienne est strictement positive.*

Les preuves se trouvent dans [15] p.144-145 et p.164-165.

Leçon :
- Étude locale de surfaces.

Références

[1] M. Alessandri - *Thèmes de Géométrie.*

[2] M. Artin - *Algebra.*

[3] M. Audin - *Géométrie.*

[4] M. Benaïm,N. El Karoui - *Promenade aléatoire.*

[5] M. Brin, G. Stuck - *Introduction to dynamical systems.*

[6] A. Chambert-Loir - *Analyse pour l'agrégation.*

[7] M. P. Do Carmo - *Geometry of curves and surfaces.*

[8] H. Dym, P. Mc. Kean - *Series fouriers and integrals.*

[9] B. Favetto - *Quelques références pour l'agrégation.* Disponible quelque part sur le web.

[10] D. Foata, A. Fuchs - *Processus stochastiques.*

[11] R. Goblot - *Algèbre commutative.*

[12] X. Gourdon - *Les maths en tête - Algèbre.*

[13] X. Gourdon - *Les maths en tête - Analyse.*

[14] J. W. Milnor - *Topology from the differentiable viewpoint.*

[15] A. Pressley - *Elementary differential geometry.*

[16] V. Pit - *Quelques développements d'agrégation.*
Disponible sur http ://perso.eleves.bretagne.ens-cachan.fr/∼ pit.

[17] M. Willem - *Analyse harmonique réelle.*

E-mail address: `mikl_crampon@yahoo.fr`