

# FLOTS D'ANOSOV, ENTROPIE ET ORBITES PÉRIODIQUES

MICKAËL CRAMPON

*Mémoire de Master 2, Université Louis Pasteur, Strasbourg.  
Sous la direction de Patrick Foulon.*

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	2
2. Remerciements	2
3. Systèmes dynamiques continus à comportement hyperbolique	3
3.1. Flots	3
3.2. Comportement hyperbolique	3
3.3. Notre exemple : le flot géodésique des métriques de Hilbert	5
4. L'(Les) entropie(s)	10
4.1. Entropie topologique	10
4.2. Entropie métrique	10
4.3. Variational principe	12
4.4. L'entropie du flot géodésique sur une surface hyperbolique	12
5. Orbites périodiques : les décrire, les compter	14
5.1. Mesure de Bowen	14
5.2. Mesure(s) de Margulis	14
5.3. Mesure de Bowen-Margulis	16
5.4. Où on compte les orbites périodiques (sans s'endormir)	16
Références	23

## 1. INTRODUCTION

Le sujet est vaste... Les quelques pages qui suivent n'ont pas vocation à remplacer le livre [11] de Katok et Hasselblatt ou à résumer la thèse [14] de Margulis, desquels de nombreux résultats sont issus. On s'est surtout attaché à rendre la totalité du texte cohérente ; il peut donc être lu, sans trop de difficultés, sans apport externe de littérature. On y parle de flots d'Anosov, en mélangeant les approches dynamiques, ergodiques et géométriques. Deux résultats principaux sont entièrement développés, (plus ou moins) remaniés depuis les sources :

- comme exemple de flot d'Anosov, on étudie dans la partie 3.3 le flot géodésique des métriques de Hilbert sur les variétés compactes munies d'une structure projective convexe, d'après [3].
- on trouve dans la section 5 l'équivalent du nombre d'orbites fermées de longueur plus petite que  $T > 0$  pour un flot d'Anosov topologiquement mélangeant. La démonstration tire ses idées principales de [11].

Les motivations étaient claires : comprendre la dynamique chaotique des flots d'Anosov à travers deux exemples de développements exploitant un large spectre de propriétés.

## 2. REMERCIEMENTS

Et bien à Thomas et Max que j'empêche de travailler, à Gemma qui m'a permis de travailler presque jusqu'au bout, à Sophie qui me fait manger des légumes, à Patrick Foulon qui m'aide à comprendre, à mon jardin qui n'est pas le mien, à Vince dont je vole encore et toujours la mise en page. Au pote Kropot(kine) :

« Le savoir est une puissance énorme. Il faut que l'homme sache. Mais nous savons déjà beaucoup de choses ! Qu'advierait-il si ces connaissances – et rien que ces connaissances – devenaient le bien commun de tous ? La science ne progresserait-elle pas alors par bonds, et l'humanité n'avancerait-elle pas à pas de géant dans le domaine de la production, de l'invention et de la création sociale, avec une rapidité que nous pouvons à peine imaginer aujourd'hui ? [...] Tous ces discours sonores où il est question de faire progresser l'humanité, tandis que les auteurs de ces progrès se tiennent à distance de ceux qu'ils prétendent pousser en avant, toutes ces phrases sont de purs sophismes faits par des esprits désireux d'échapper à une irritante contradiction. » [12]

## 3. SYSTÈMES DYNAMIQUES CONTINUS À COMPORTEMENT HYPERBOLIQUE

**3.1. Flots.** De façon tout à fait générale, un système dynamique est la donnée d'un espace  $X$  sur lequel agit un groupe  $G$ . Très souvent, ce groupe est soit  $\mathbb{Z}$  soit  $\mathbb{R}$  et on parle respectivement de système dynamique discret ou continu ; par exemple, on se donne une application  $f : X \rightarrow X$  et  $\mathbb{Z}$  agit sur  $X$  via  $n.x = f^n(x)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in X$ .

Ici, on s'intéresse à l'action de  $\mathbb{R}$  sur une variété lisse compacte  $M$ , via la donnée d'un groupe à un paramètre de difféomorphismes, c'est à dire une famille de  $C^k$ -difféomorphismes  $\varphi = \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  ( $k \geq 1$ ) vérifiant  $\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s$ ,  $t, s \in \mathbb{R}$ .

C'est la situation qui apparaît naturellement lorsqu'on considère sur  $M$  un champ de vecteurs  $X$  de classe  $C^{k-1}$  dont on cherche les courbes intégrales, c'est-à-dire les courbes  $c : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow M$  vérifiant  $\forall t, c'(t) = X(c(t))$ . En effet, si  $M$  est compacte, le champ  $X$  est automatiquement complet : l'équation précédente admet une unique solution  $c_x$  définie sur  $\mathbb{R}$  pour toute condition initiale  $c(0) = x$ . Ainsi, on peut considérer le flot  $\varphi$  de l'équation différentielle associée au champ  $X$  :

$$\begin{aligned} \varphi : M \times \mathbb{R} &\longrightarrow M \\ (x, t) &\longmapsto c_x(t). \end{aligned}$$

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , l'application  $\varphi^t : x \mapsto \varphi(t, x) = c_x(t)$  est alors un  $C^k$ -difféomorphisme de  $M$ , et  $\varphi = \{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$  nous donne un groupe à un paramètre de difféomorphismes de  $M$ . Il apparaît donc équivalent, dans le cas compact, de se donner  $\varphi$  ou  $X$ .

Sur une variété  $M$  munie d'une structure métrique géodésiquement complète, il est naturel de considérer le flot géodésique associé à la structure sur le fibré tangent unitaire  $T^1M$  : l'image  $\varphi^t(x, v)$  d'un point  $(x, v) \in T^1M$  par le flot est le point  $(x(t), v(t))$ , où  $t \mapsto x(t)$  est la géodésique partant de  $x$  dans la direction  $v$ . Par exemple, sur une variété riemannienne  $(M, g)$ , ce flot est celui de l'équation différentielle du second ordre sur  $M$  dont les solutions sont les géodésiques, qu'on appelle traditionnellement "Equation d'Euler-Lagrange" ou "équation des géodésiques" ; si  $(\Gamma_{j,k}^i)$  représentent les symboles de Cristoffel, elle est donnée en coordonnées par le système

$$\ddot{c}_i + \sum_{j,k=1}^n \Gamma_{j,k}^i \dot{c}_j \dot{c}_k = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

où  $n$  est la dimension de  $M$ .

Pour prendre un exemple trivial, le flot géodésique sur (le fibré unitaire tangent de) la sphère  $(T^1)\mathbb{S}^2$  de rayon  $R$ , munie de la métrique standard induite par  $\mathbb{R}^3$ , a un comportement très simple : les géodésiques sont les grand cercles ; ainsi, chaque orbite est périodique, avec la même période  $2\pi R$ .

Sur le tore "euclidien standard", par contre, on voit qu'il peut y avoir des orbites périodiques aux périodes variées, d'autres dont la projection sur la surface est dense.

**3.2. Comportement hyperbolique.** Les systèmes dynamiques qui nous intéresseront ici ont un comportement qui se rapproche de celui du flot géodésique sur les surfaces hyperboliques, à courbure négative, dont Hadamard le premier décrit la dynamique en 1898 ([9]). On dit d'ailleurs d'eux que leur comportement est hyperbolique.

Le prototype hyperbolique est le suivant : on regarde les itérés d'une application linéaire  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dont les valeurs propres ont des modules différents de 0 et 1. L'espace se décompose alors en deux sous-espaces  $E^+$  et  $E^-$  sur lesquels la restriction de  $f$  est respectivement dilatante et contractante. La version améliorée consiste à prendre un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  qui admette un point fixe  $x$  et d'étudier le comportement des itérés dans un voisinage du point fixe. La linéarisation du système, autrement dit la différentielle en  $x$ , fournira l'essentiel du comportement local, et on dira que  $x$  est un point fixe hyperbolique si l'on est dans le cas prototypique. On pourra se référer à l'excellent livre de Hirsch et Smale [10] pour un aperçu détaillé du sujet.

Il ne reste alors plus qu'à faire de même sur une variété, et en des points qui ne seraient pas fixes, soit, visiblement, peu en substance, mais un travail technique conséquent. C'est ce que fit finalement Anosov en introduisant dans son article fondateur [1] les  $U$ -flows, et en en dérivant

les principales propriétés. Cette propriété U est aujourd'hui connue sous le nom de propriété d'Anosov :

**Définition 3.1.** *Le flot  $\varphi = \{\varphi^t\}$  sur  $M$  est un **flot d'Anosov** s'il est sans point fixe et si, en tout point  $x \in M$ , l'espace tangent  $T_x M$  peut s'écrire comme la somme directe*

$$T_x M = \mathbb{R}.X \oplus E_x^- \oplus E_x^+,$$

stable par le flot, avec

$$\dim E_x^\pm > 0$$

et des constantes  $a, C > 0$  telles que pour  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} |D\varphi^t u| &\leq C|u|e^{-at} & \text{si } u \in E_x^-, \\ |D\varphi^{-t} v| &\leq C|v|e^{-at} & \text{si } v \in E_x^+. \end{aligned}$$

Les sous-fibrés  $E^-, E^+, E^{0,-} = \mathbb{R}.X \oplus E^-, E^{0,+} = \mathbb{R}.X \oplus E^+$  sont respectivement appelés distributions stable, instable, faiblement stable, faiblement instable.

Dans son article, Anosov étudie abondamment ces systèmes, sous l'hypothèse qu'ils préservent une forme volume et qu'ils n'ont pas de fonctions propres (i.e. de fonctions continues  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $(\varphi^t)^* f = e^{ait} f$ , pour un  $a \in \mathbb{R}$ ), et à sa suite, on procéda globalement de même. Toutefois, les résultats obtenus se généralisent aux flots d'Anosov topologiquement mélangeants et pourront donc s'appliquer au cas du flot géodésique des métriques de Hilbert, qui reste notre objectif et exemple principal (c.f. 3.3). C'est donc dans ce cadre que nous travaillerons. On rappelle ici quelques définitions :

**Définitions 3.2.** *Le flot  $\varphi = \{\varphi^t\}$  sur  $M$  est dit*

- **topologiquement transitif** s'il existe  $x \in M$  dont l'orbite  $\varphi.x$  est dense dans  $M$ , ou, de façon équivalente, si, pour tous ouverts  $U, V$  de  $M$ , il existe  $T \geq 0$  tel que  $\varphi^T(U) \cap V \neq \emptyset$ ;
- **topologiquement mélangeant** si pour tous ouverts  $U, V$  de  $M$ , il existe  $T \geq 0$  tel que, dès que  $t \geq T$ ,  $\varphi^t(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Les variétés stable  $W^-(x)$  et instable  $W^+(x)$  d'un flot d'Anosov  $\varphi = \{\varphi^t\}$  au point  $x \in (M, d)$  sont définies par

$$\begin{aligned} W^-(x) &= \{y \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi^t(x), \varphi^t(y)) = 0\}, \\ W^+(x) &= \{y \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi^{-t}(x), \varphi^{-t}(y)) = 0\}. \end{aligned}$$

Par suite, les variétés fortement stable et instable  $W_0^\pm(x)$  en  $x \in M$  sont définies par

$$W_0^\pm(x) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \varphi^t(W^\pm(x)).$$

Le résultat suivant est valable pour tout flot d'Anosov  $\varphi = \{\varphi^t\}$ ; il affirme que les variétés (faiblement) stable et instable sont des sous-variétés de  $M$  et s'obtiennent en intégrant les distributions (faiblement) stable et instable; de plus, elles permettent de feuilleter la variété.

**Théorème 3.3.** *Pour tout  $x \in M$ ,  $W^-(x)$  est une sous-variété de  $M$  de dimension  $k = \dim E_x^-$ , dont l'espace tangent en  $y \in W^-(x)$  est exactement  $E_y^-$ . On a de même pour  $W^+(x), W_0^-(x)$  et  $W_0^+(x)$ .*

*De plus, les variétés stable  $W^-$  et faiblement instable  $W_0^+$  forment un feuilletage de  $M$ . De même si on considère les variété instable  $W^+$  et faiblement stable  $W_0^-$ .*

**Remarques :** Il est important de faire attention au fait que la distribution  $E^+ \oplus E^-$  n'est elle pas intégrable; en un certain sens, les feuilles stables et instables ne sont pas régulières l'une par rapport à l'autre et qu'elles tendent à se mélanger.

En accord avec le résultat précédent de feuilletage, les sous-variétés  $W^-(x)(W_0^-(x)), W^+(x)(W_0^+(x))$  seront dorénavant appelées feuilles (faiblement) stable et instable de  $x$ .

La proposition suivante est indispensable au bon déroulement de la section 5.

**Proposition 3.4.** *Si  $\varphi$  est un flot d'Anosov topologiquement mélangeant sur  $M$ , alors chaque feuille stable ou instable, qu'elle soit faible ou pas, est dense dans  $M$ .*

**3.3. Notre exemple : le flot géodésique des métriques de Hilbert.** On suit plus ou moins le papier de Benoist [3] pour avoir le résultat suivant :

**Théorème 3.5.** *Soit  $\Omega$  un ouvert strictement proprement convexe de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$  et  $\Gamma$  un sous-groupe discret sans torsion de  $PGL(\mathbb{R}^m)$  qui divise  $\Omega$ . Alors le flot géodésique de la métrique de Hilbert sur la variété quotient  $M = \Gamma \backslash \Omega$  est un flot d'Anosov.*

**3.3.1. Quelques rappels sur la géométrie de Hilbert.** On considère un ouvert strictement proprement convexe  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^m)$ , au bord  $C^1$ . Proprement convexe signifie qu'il existe un hyperplan projectif qui ne coupe pas l'adhérence de  $\Omega$ . On suppose qu'il existe un sous-groupe  $\Gamma$  de  $PGL(\mathbb{R}^m)$  qui préserve  $\Omega$ . On peut ainsi considérer le quotient  $M = \Gamma \backslash \Omega$ , et si, de plus,  $\Gamma$  est discret et sans torsion,  $M$  est alors une variété compacte de classe  $C^\infty$  ; son revêtement universel s'identifie avec  $\Omega$ , et son groupe fondamental avec  $\Gamma$ . Yves Benoist parle de **convexe divisible**. On peut alors considérer la métrique de Hilbert  $d_\Omega$  sur ce convexe, définie pour  $x, y \in \Omega$  par :

$$d_\Omega(x, y) = |\log([a, b, x, y])|,$$

où  $a, b$  sont les points d'intersection de la droite  $[x, y]$  avec le bord  $\partial\Omega$  ;  $[a, b, x, y] = \frac{ax/bx}{ay/by}$  désigne le birapport des quatre points.  $PGL(\mathbb{R}^m)$  préserve cette distance, et cela donne une métrique de Finsler  $F$  sur la variété, avec pour  $(x, \xi) \in TM$  :

$$(3.1) \quad F(x, \xi) = |\xi| \left( \frac{1}{xp^+(x, \xi)} + \frac{1}{xp^-(x, \xi)} \right) = (\sigma^+((x, \xi)) + \sigma^-((x, \xi))),$$

où  $|\cdot|$  représente la norme euclidienne, et  $p^+(x, \xi), p^-(x, \xi)$  sont les points d'intersection de la droite  $\{x + \lambda\xi\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  avec le bord  $\partial\Omega$ . (Pour préciser : on voit  $\Omega$  comme une partie de  $\mathbb{R}^m$  via une carte affine, la distance euclidienne est celle de ce  $\mathbb{R}^m$ , et un point  $(x, \xi)$  de  $TM$  est vu dans  $\Omega \times \mathbb{R}^m$ , via un relèvement quelconque.) Les applications  $p^+, p^- : T\Omega \rightarrow \partial\Omega$  ont la régularité du bord, elle sont donc au moins de classe  $C^1$ .

Pour la distance  $d_\Omega$ , les géodésiques (sur  $\Omega$ ) sont les droites, ce qui rappelle (et en fait généralise) le cas hyperbolique de la boule de Klein. Du coup, on travaille dans  $\Omega$  et le flot géodésique est bien défini sur le fibré tangent unitaire (finslérien)  $T^1\Omega$  ; on le note encore  $\varphi$ . (Tout du long, les notations, qu'on soit dans  $M$  ou  $\Omega$ , seront les mêmes.)

**3.3.2. Le flot géodésique, définitions des feuilletages (faiblement) stable et instable.** On note  $w = (x, \xi)$  un point de  $T^1\Omega$ ,  $p^\pm = p^\pm(w), \sigma^\pm = \sigma^\pm(w)$ . Son image par le flot géodésique  $\varphi_t$ , pour  $t \in \mathbb{R}$ , est le point  $w_t = (x_t, \xi_t)$ , où  $x_t$  est sur la droite  $\{x + \lambda\xi\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$  et vérifie  $d_\Omega(x, x_t) = t$ ,  $\xi_t$  est colinéaire à  $\xi$  avec  $F(x_t, \xi_t) = 1$ . Cela donne :

$$(3.2) \quad x_t = x + \frac{e^t - 1}{\sigma^+ e^t + \sigma^-} \xi = x + (1 - e^{-t}) \frac{\sigma_t^+}{\sigma^+} \xi,$$

$$(3.3) \quad \xi_t = \frac{e^t}{(\sigma^+ e^t + \sigma^-)^2} \xi = \left( \frac{\sigma_t^+}{\sigma^+} \right)^2 e^{-t} \xi,$$

où  $\sigma^+ = \sigma^+(w) = \frac{|\xi|}{xp^+} = \frac{xp^-}{p^- p^+}$  et  $\sigma^- = \sigma^-(w) = \frac{|\xi|}{xp^-} = \frac{xp^+}{p^- p^+}$  ont été définis en (3.1). Notons au passage que :

$$\sigma_t^+ = \frac{\sigma^+ e^t}{\sigma^+ e^t + \sigma^-}, \quad \sigma_t^- = \frac{\sigma^-}{\sigma^+ e^t + \sigma^-}.$$

Dans la suite,  $H_p$  désigne l'hyperplan projectif tangent au bord  $\partial\Omega$  en  $p \in \partial\Omega$ , et  $\langle x, y \rangle$  la droite joignant les points  $x$  et  $y$  de  $\Omega$ . On définit alors les feuilles faiblement stable  $W_{w_0}^{0,-}$  et stable  $W_{w_0}^-$  sur  $T^1\Omega$  en  $w_0$  par

$$W_{w_0}^{0,-} = (p^+)^{-1}(p^+(w_0)),$$

$$W_{w_0}^- = \{w \in W_{w_0}^{-,0} / w = w_0 \text{ ou } \langle x_0, x \rangle \cap \langle p^-(w_0), p^-(w) \rangle \subset H_{p^+(w_0)}\}.$$

Cette définition est justifiée par le lemme 3.4 de [3], qui affirme que

$$W_{(x_0, \xi_0)}^- = \{w = (x, \xi) \in T^1\Omega / \lim_{t \rightarrow \infty} d_\Omega(x_t, x_0, t) = 0\}.$$

La projection de  $W_{w_0}^-$  sur  $\Omega$  est l'horosphère  $\mathcal{H}_w$  : c'est la limite des sphères, pour la métrique de Hilbert, passant par  $x$  quand le centre tend vers  $p^+(w)$ . Ainsi, les feuilletages sont bien invariants par  $\Gamma$ , qui préserve la distance de Hilbert et donc les horosphères, ce qui donne bien, en passant au quotient, des feuilletages de  $M$ .

Les distributions tangentes correspondantes peuvent être décrites dans une bonne carte affine, où le sous-espace  $H_{p^+(w)} \cap H_{p^-(w)}$  est à l'infini, par :

$$E_w^- = \{v^- \in T_w T^1\Omega / v^- = (y, -\sigma^+(w)y), y \in T_x \mathcal{H}_w\},$$

$$E_w^0 = \mathbb{R} \cdot (\xi, (\sigma^-(w) - \sigma^+(w))\xi) \text{ et } E_w^{-,0} = E_w^- \oplus E_w^0.$$

Remarquons que dans cette carte,  $T_x \mathcal{H}_w$  n'est autre que  $\xi^\perp$ , l'orthogonal euclidien de  $\xi$ .

Inverser le temps consiste à partir dans la direction opposée. Ainsi, par symétrie, on définit les feuilletages instable  $W^+$  et faiblement instable  $W^{+,0}$ , et les distributions correspondantes  $E_w^+$  et  $E_w^{+,0}$ .

**3.3.3. Le flot est d'Anosov.** Pour montrer la propriété d'Anosov, on munit  $TM$  d'une métrique riemannienne  $\|\cdot\|$ , qui donne sur  $T\Omega$  une norme  $\Gamma$ -invariante, qu'on note encore  $\|\cdot\|$ . Il s'agit de prouver qu'il existe  $K, c > 0$  tels que pour tout  $v^- \in E^-$ ,  $\|T\varphi^t(v^-)\| \leq Ke^{-ct}\|v^-\|$ . L'inégalité sur la distribution instable s'en suivra par symétrie.

On appelle  $\pi : T\Omega \rightarrow \Omega$  la projection sur la base. Dans un certain sens, précisé par le lemme suivant, la norme  $\|\cdot\|$  et  $F$  sont équivalentes.

**Lemme 3.6.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tous  $(x, \xi) \in TM$ ,  $u \in T_{(x, \xi)}TM$ ,*

$$\frac{1}{C}\|u\| \leq F(x, d\pi(u)) \leq C\|u\|.$$

*Preuve.*  $F : TM \rightarrow [0, +\infty[$  étant une fonction continue, la composée

$$F \circ d\pi : \begin{array}{ccc} (TTM, \|\cdot\|) & \longrightarrow & [0, +\infty[ \\ u & \longmapsto & d\pi(u) \end{array}$$

l'est aussi, donc sa restriction au compact  $T_1TM = \{u \in TTM, \|u\| = 1\}$  est bornée. Comme elle y est aussi non nulle, il existe  $C > 0$  telle que, pour tout  $u \in T_1TM$ ,

$$\frac{1}{C} \leq F(x, d\pi(u)) \leq C,$$

et le lemme s'en suit par homogénéité de  $F$ . □

Dans la carte affine introduite à la fin de 3.3.2, en  $w = (x, \xi)$  et pour  $v^- = (y, -\sigma^+y) \in E_w^-$ , on a  $d\pi(v^-) = y$ . L'image du vecteur tangent  $v^-$  par le flot est donnée par  $v_t^- = (y_t, -\sigma_t^+y_t)$ , avec

$$(3.4) \quad y_t = \frac{\sigma_t^+}{\sigma^+} e^{-t} y,$$

qu'on obtient grâce aux expressions (3.2) ou (3.3) du flot. En honneur du lemme 3.6, on cherche à exprimer  $F(x_t, d\pi(v_t^-))$  en fonction de  $F(x, d\pi(v^-))$ . Les calculs se feront dans cette carte.

**Lemme 3.7.** *Pour tout  $v^- \in E^-$ , la fonction*

$$f_{v^-} : t \longmapsto \frac{F(x_t, d\pi(v_t^-))}{F(x, d\pi(v^-))}$$

*est une bijection continue de  $[0, +\infty[$  dans  $]0, 1]$ .*

*Preuve.* On fixe  $w = (x, \xi) \in \Omega$  et  $v^- = (y, -\sigma^+ y) \in E_w^-$  dans la carte affine introduite précédemment. Du calcul ci-dessus, on déduit, pour  $t \geq 0$ , que

$$F(x_t, d\pi(v_t^-)) = F(x_t, y_t) = \frac{\sigma_t^+}{\sigma^+} e^{-t} F(x_t, y) = \frac{\sigma_t^+}{\sigma^+} e^{-t} F(x_t, d\pi(v^-)).$$

Notons, pour  $t \geq 0$ ,  $x_t^\pm = p^\pm(x_t, y)$ ,  $x^\pm = x_0^\pm$  et  $z_t^\pm$  les points d'intersection des droites  $\langle x^\pm, p^+ \rangle$  et  $\langle x_t, x_t^\pm \rangle$ , comme sur la figure 1.

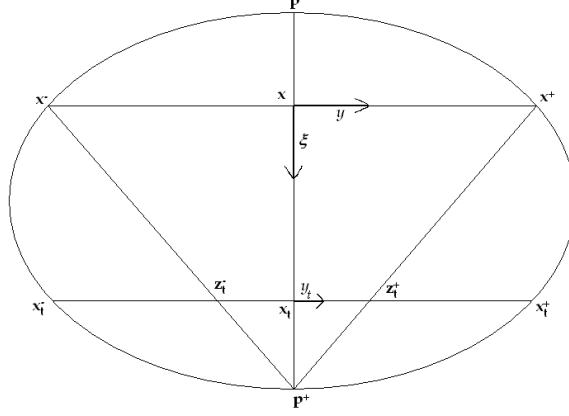


FIG. 1. Pour comprendre les calculs...

Comme  $e^t = e^{d\Omega(x, x_t)} = [p^-, p^+, x, x_t] = \frac{xp^-/xp^+}{x_t p^-/x_t p^+}$ , on a, grâce au vieux Thalès,

$$(3.5) \quad \frac{\sigma_t^+}{\sigma^+} e^{-t} = \frac{x_t p^+}{x p^+} = \frac{x_t z_t^+}{x x^+} = \frac{x_t z_t^-}{x x^-}$$

et

$$F(x_t, y_t) = |y| \left( \frac{x_t z_t^+}{x x^+ x_t x_t^+} + \frac{x_t z_t^-}{x x^- x_t x_t^-} \right).$$

Soit alors  $h_{v^-}^\pm$  les fonctions définies pour  $t \geq 0$  par  $h_{v^-}^\pm(t) = \frac{x_t z_t^\pm}{x_t x_t^\pm}$ , et  $h_{v^-} = \max\{h_{v^-}^+, h_{v^-}^-\}$ . On a ainsi, pour tout  $t \geq 0$  :

$$F(x_t, y_t) \leq h_{v^-}(t) F(x, y).$$

Le bord étant  $C^1$  et strictement convexe, les fonctions  $h_{v^-}^\pm$  ont les propriétés suivantes :

- (1) elles sont  $C^1$ , strictement décroissantes et convexes en  $t$  ;
- (2)  $h_{v^-}^\pm(0) = 1$  ;
- (3)  $\forall t \geq 0$ ,  $h_{v^-}^\pm(t) \leq 1$  ;
- (4)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} h_{v^-}^\pm(t) = 0$ .

En particulier, on en déduit que  $h_{v^-}$  est une bijection continue de  $[0, +\infty[$  dans  $]0, 1]$ .

La fonction  $f_{v^-} : t \mapsto \frac{F(x_t, d\pi(v_t^-))}{F(x, d\pi(v^-))}$  vérifie  $f_{v^-}(0) = 1$ ,  $0 < f_{v^-} \leq h_{v^-}$  ; elle est donc surjective de  $[0, +\infty[$  sur  $]0, 1]$ . De plus, pour  $t > 0$ , on a  $f_{v^-}(t) < 1$ , c'est-à-dire

$$F(x_t, d\pi(v_t^-)) < F(x, d\pi(v^-)).$$

Maintenant, si  $0 \leq s < t$ , on peut reprendre le raisonnement précédent en partant de  $x_s$  et non plus de  $x$  pour avoir

$$F(x_t, d\pi(v_t^-)) < F(x_s, d\pi(v_s^-)).$$

Autrement dit,  $f_{v^-}$  est une fonction strictement décroissante, donc injective, donc bijective de  $[0, +\infty[$  dans  $]0, 1]$ .  $\square$

**Lemme 3.8.** *Pour tout  $a > 0$ , il existe un réel  $t_a \geq 0$  tel que, pour tous  $w = (x, \xi) \in \Omega$  et  $v^- \in E_w^-$ ,*

$$F(x_t, d\pi(v_t^-)) \leq aF(x, d\pi(v^-)).$$

*Preuve.* Suivant le lemme précédent, pour tout  $0 < a \leq 1$ , il existe un réel  $T_a(v^-) \geq 0$  tel que  $f_{v^-}(T_a(v^-)) = a$ . Comme  $(v^-, t) \mapsto f_{v^-}(t)$  est continue sur  $E^- \times [0, +\infty[$ , cela nous définit une fonction continue

$$T_a : \begin{array}{ccc} E^- & \longrightarrow & [0, +\infty[ \\ v^- & \longmapsto & T_a(v^-) \end{array},$$

qui, puisque  $F$  l'est, est invariante par  $\Gamma$ . De plus, pour  $|\lambda| \neq 0$ ,  $T_a(\lambda v^-) = T_a(v^-)$  puisque  $f_{\lambda v^-} = f_{v^-}$ . Ainsi, en passant au quotient, on obtient une fonction

$$\tilde{T}_a : T_1TM \longrightarrow [0, +\infty[$$

continue sur un compact, qui atteint donc son maximum  $t_a$ . Pour  $t \geq t_a$ , on a bien

$$F(x_t, d\pi(v_t^-)) < aF(x, d\pi(v^-)).$$

□

Tout cela permet de prouver le théorème 3.5. En effet, si on se donne  $0 < a < 1$ , alors pour  $t \geq t_a$ , en écrivant  $t = t - t_a + t_a$ , on a

$$F(x_t, d\pi(v_t^-)) \leq aF(x_{t-t_a}, d\pi(v_{t-t_a}^-)) \leq \dots \leq a^{\lfloor t/t_a \rfloor} F(x, d\pi(v^-)) \leq a^{t/t_a - 1} F(x, d\pi(v^-)).$$

Comme  $a < 1$ , l'inégalité reste vraie pour  $0 \leq t \leq t_a$  puisqu'alors  $a^{t/t_a - 1} \geq 1$ . Ainsi, on a finalement pour tout  $t \geq 0$ , avec  $c_a = -\frac{\log(a)}{t_a} > 0$  :

$$(3.6) \quad F(x_t, d\pi(v_t^-)) \leq a^{-1} e^{-c_a t} F(x, d\pi(v^-)).$$

Les inégalités du lemme 3.6 permettent alors de conclure que, pour tout  $v^- \in E^-$ ,

$$\|T\varphi^t(v^-)\| \leq a^{-1} C^2 e^{-c_a t} \|v^-\|,$$

autrement dit la propriété d'Anosov sur la distribution stable.

### 3.3.4. Pour aller un peu plus loin.

**Lemme 3.9.** *Pour tout  $0 < a < 1$ , on a  $c_a < 1$ .*

*Preuve.* Dans la bonne carte usuelle, en gardant les notations du lemme 3.7, on tire de l'inégalité (3.6) et de (3.4) que

$$a^{-1} e^{(1-c_a)t} \frac{\sigma^+}{\sigma_t^+ |y|} F(x, y) \geq \frac{F(x_t, y_t)}{|y_t|} = \left( \frac{1}{x_t x_t^+} + \frac{1}{x_t x_t^-} \right).$$

Comme  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x_t x_t^+} + \frac{1}{x_t x_t^-} \right) = +\infty$ , cela implique nécessairement que  $c_a < 1$ . □

**Définition 3.10.** *Soit  $M$  une sous-variété fermée  $C^1$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^p$ . On dit que  $M$  est de classe  $C^\alpha$ ,  $\alpha > 1$ , si, pour tout compact  $K$  de  $M$ , il existe une constante  $C_K > 0$  telle que, pour tout  $p, p' \in K$ ,*

$$(3.7) \quad d(p', T_p M) \leq C_K |p' p|^\alpha.$$

Des résultats précédents, on déduit facilement la

**Proposition 3.11.** *Il existe  $\alpha > 1$  tel que  $\partial\Omega$  soit de classe  $C^\alpha$ .*

*Preuve.* Choisissons une carte affine dans laquelle  $\Omega$  soit relativement compact. Soit  $K$  le compact

$$K = \{w = (x, \xi) \in T^1\Omega / H_{p^+(w)} \text{ et } H_{p^-(w)} \text{ sont parallèles, } x \text{ milieu de } [p^+(w), p^-(w)]\}.$$

On veut montrer, pour un  $\alpha > 1$ , l'inégalité (3.7) pour tout couple  $(p, p') \in \partial\Omega^2$ . Or, en gardant les notations de la partie précédente, il existe toujours  $w \in K$  tel que  $p = p^+(w)$  et



$v^- = (y, -\sigma^+ y) \in E_w^-$ ,  $t \geq 0$  tel que  $|y| = 1$ ,  $p' = x_t^+$ . Dans cette configuration, tous les calculs ont déjà été menés et on a, via (3.5) et (3.4) :

$$d(p', T_p \partial \Omega) = d(x_t^+, H_{p^+}) = x_t p^+ = \frac{\sigma_t^+}{\sigma^+} e^{-t} x p^+ \leq \frac{1}{\sigma^+} e^{-t} x p^+.$$

De plus, pour tout  $0 < a < 1$ ,

$$\frac{1}{p' p} = \frac{1}{p^+ x_t^+} \sim \frac{1}{x_t x_t^+} \leq \frac{F(x_t, y_t)}{|y_t|} \leq a^{-1} e^{(1-c_a)t} \frac{\sigma^+}{\sigma_t^+} F(x, y) \leq a^{-1} e^{(1-c_a)t} F(x, y).$$

Finalement, cela donne :

$$\frac{d(p', T_p \partial \Omega)}{|p' p|^\alpha} \sim \frac{x_t p^+}{|x_t x_t^+|^\alpha} \leq \frac{x p^+ (F(x, y))^\alpha}{\sigma^+ a^\alpha} e^{-(1-\alpha(1-c_a))t}.$$

Comme  $K$  est compact,  $\max_{w \in K} \frac{x p^+ (F(x, y))^\alpha}{\sigma^+ a^\alpha} < \infty$ , et donc

$$\frac{d(p', T_p \partial \Omega)}{|p' p|^\alpha} = O\left(\frac{x_t p^+}{|x_t x_t^+|^\alpha}\right) = O(e^{-(1-\alpha(1-c_a))t}).$$

En particulier, en choisissant  $\alpha = \frac{1}{1-c_a} > 1$ , on en conclut que  $\frac{d(p', T_p \partial \Omega)}{|p' p|^\alpha}$  est borné.  $\square$

La proposition suivante, que l'on peut trouver dans [3], découle immédiatement de propriétés propres au groupe  $\Gamma$ , étudiées dans [7] et [2] par exemple, et auxquels on renvoie le lecteur.

**Proposition 3.12.** *Le flot géodésique est topologiquement mélangeant.*

## 4. L'(LES) ENTROPIE(S)

Cette partie introduit deux notions d'entropie pour un système dynamique dans le cas général. Elle ne respecte pas l'ordre chronologique et est vraiment incomplète sur le sujet : seuls les concepts et résultats qui seront nécessaires à la compréhension de la partie suivante sont abordés.

**4.1. Entropie topologique.** On introduit les métriques équivalentes  $(d_t)_{t \in \mathbb{R}}$  sur  $X$  :

$$\forall x, y \in X, d_t(x, y) = \max_{0 \leq s \leq t} d(\varphi^s(x), \varphi^s(y)).$$

Pour  $\epsilon > 0$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ , on considère alors des recouvrements de  $X$  par des ouverts de diamètre au plus  $\epsilon$  pour la métrique  $d_t$ . On note  $D(\varphi, t, \epsilon)$  le nombre minimum d'ouverts nécessaires.

**Lemme 4.1.** *Pour tout  $\epsilon > 0$ , la limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(D(\varphi, t, \epsilon))$  existe et est finie.*

*Preuve.* On montre que la fonction  $(\log D(\varphi, t, \epsilon))_{t \in \mathbb{R}}$  est sous-additive. □

**Définition 4.2.** *L'entropie topologique du flot  $\varphi$  est la quantité définie par :*

$$h_{top}(\varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log D(\varphi, t, \epsilon) \right].$$

D'autres définitions peuvent être données en considérant pour tout  $\epsilon > 0$  et tout  $t \geq 0$  :

- $N(\varphi, t, \epsilon)$ , le cardinal maximal d'une partie  $\epsilon$ -séparée pour  $d_t$ , i.e. une partie  $A$  de  $X$  vérifiant  $\forall x, y \in A, d_t(x, y) > \epsilon$ ;
- $S(\varphi, t, \epsilon)$  le cardinal minimal d'une partie  $A$  de  $X$  telle que pour tout  $x \in X, d_t(x, A) < \epsilon$ .

On vérifie, pour tout  $\epsilon > 0$  et tout  $t \geq 0$ , que  $D(\varphi, t, 2\epsilon) \leq S(\varphi, t, \epsilon) \leq N(\varphi, t, \epsilon) \leq D(\varphi, t, \epsilon)$ . Ainsi, l'entropie topologique peut être définie de façon équivalente par :

$$\begin{aligned} h_{top}(\varphi) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log D(\varphi, t, \epsilon) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log N(\varphi, t, \epsilon) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log S(\varphi, t, \epsilon) \right]. \end{aligned}$$

Lorsqu'on a un flot  $\varphi$ , on peut considérer le système dynamique discret engendré par  $\varphi^a$ , pour tout  $a \neq 0$ , et l'entropie est définie discrètement comme précédemment. On a alors la

**Proposition 4.3.**

$$h_{top}(\varphi) = h_{top}(\varphi^1).$$

**4.2. Entropie métrique.** Pour toute cette section, la plupart des preuves (toutes ?) sont omises. On laisse le lecteur se référer au classique [11] où à l'excellent [15]. L'approche du livre [15] de Sinai est largement plus mesurable et probabiliste que celle de [11].

**4.2.1. Un peu de théorie ergodique.** La théorie ergodique consiste à étudier des systèmes dynamiques d'un point de vue mesurable, en considérant un espace mesuré  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ , sur lequel on agit via des applications mesurables.

Ici, le point de départ était topologique et compact, on cherche donc à introduire des mesures de probabilité bien choisies sur, disons, une tribu  $\mathcal{A}$  contenant les Boréliens, et se placer ainsi dans le cadre ergodique. On dira qu'une mesure  $\mu$  est bien choisie si elle permet de décrire la dynamique...

La première chose qu'on lui demande, c'est d'être invariante par le flot, c'est-à-dire que pour tous  $t \in \mathbb{R}, A \in \mathcal{A}, \mu(A) = \mu(\varphi^t(A))$  ou, pour faire court,  $(\varphi^t)^* \mu = \mu$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Or, on a le

**Théorème 4.4.** *L'ensemble  $\mathcal{M}_\varphi$  des mesures de probabilité invariantes par le flot est une partie convexe non vide, dont les points extrémaux constituent les mesures ergodiques. En particulier, il existe au moins une mesure ergodique.*

où

**Définition 4.5.** *Une mesure  $\mu$  sur  $(X, \mathcal{A})$  est dite **ergodique** si elle est invariante par le flot et si toute partie mesurable  $A \in \mathcal{A}$  invariante par le flot est de mesure nulle ou pleine.*

Enfin, on introduit la notion de mélange pour un système mesuré :

**Définition 4.6.** *Le système dynamique  $(X, \varphi, \mu)$  (ou la mesure  $\mu$ ) est dit(e) **mélangeant(e)** si pour toutes parties mesurables  $A, B$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(\varphi^t(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B).$$

En gros, la mesure est mélangeante si, en temps long, l'image d'une partie  $A$  est  $(\mu)$ -répartie dans une partie  $B$  comme elle l'est dans  $X$  tout entier.

**Proposition 4.7.** *Une mesure mélangeante est ergodique.*

4.2.2. *Entropie d'une partition.*

**Définitions 4.8.** *Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  un espace probabilisé.*

– *Un sous-ensemble  $\xi$  de  $\mathcal{A}$  est une partition mesurable de  $X$  si*

$$\forall A, A' \in \xi, \mu(A \cap A') = 0, \text{ et } \mu(X \setminus \bigcup_{A \in \xi} A) = 0.$$

– *L'entropie d'une partition mesurable  $\xi$  est la quantité*

$$H_\mu(\xi) = - \sum_{A \in \xi} \mu(A) \log(\mu(A)) \in [0, +\infty],$$

où  $0 \log 0 = 0$ .

– *Si  $\xi$  et  $\eta$  sont deux partitions mesurables, l'entropie conditionnelle de  $\xi$  par rapport à  $\eta$  est la quantité*

$$H_\mu(\xi|\eta) = \sum_{B \in \eta} \mu(B) H_\mu(\xi|B) = - \sum_{B \in \eta} \mu(B) \sum_{A \in \xi} \mu(A|B) \log(\mu(A|B)),$$

où  $\mu(A|B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$ .

Deux remarques sur ces définitions :

- On peut toujours supposer (et c'est que nous ferons dorénavant) que les partitions considérées sont dénombrables, quitte à enlever les éléments de mesure nulle : la mesure  $\mu$  étant finie, on ne peut pas avoir une infinité non dénombrable de parties  $\mu$ -disjointes de mesure non nulle.
- Supposons que  $X$  représente l'ensemble des états possibles d'un système et  $\xi$  notre connaissance de ces états, c'est-à-dire qu'on ne sait pas faire la différence entre deux états  $x$  et  $x'$  d'une même partie  $A \in \xi$ . Par contre, on sait via  $\mu$  mesurer le "nombre" d'états  $\mu(A)$  dans une même partie  $A \in \xi$ . La quantité  $I_\mu(A) = -\log(\mu(A))$  mesure ainsi l'information que l'on a sur le système lorsqu'on sait que l'on est dans  $A$  : plus  $\mu(A)$  est petit, plus l'information  $I_\mu(A)$  donnée par  $A$  est grande ; en effet, il y a alors "moins d'états" dans  $A$ , on a donc mieux "cerné" l'état du système.

L'entropie  $H_\mu(\xi) = - \sum_{A \in \xi} \mu(A) \log(\mu(A))$  représente la moyenne via  $\mu$  de ces informations, autrement dit l'information moyenne donnée par  $\xi$ . L'entropie de la partition  $\xi = (X, \emptyset)$  est nulle, par exemple. Si l'on veut décrire précisément un système, on comprend alors qu'il faudra trouver des mesures et des partitions permettant de maximiser l'entropie.

Conformément à la dernière remarque, on peut s'attendre à tout plein de propriétés simples qu'on trouve traditionnellement dans [11] (et qui tiennent mathématiquement à la convexité de la fonction  $x \mapsto x \log(x)$ , choisie pour...).

**4.2.3. Entropie métrique d'un système dynamique.** Nous allons attacher à un système dynamique discret  $(X, f)$ , une entropie  $h_\mu(f)$  pour chaque mesure  $\mu$   $f$ -invariante définie sur une tribu  $\mathcal{A}$ . Pour cela, pour chaque partition  $\xi$ , on introduit la suite de partitions  $(\xi^n)$  définie pour  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$\xi^n = \xi \vee f^{-1}\xi \vee \dots \vee f^{-n}\xi.$$

**Proposition-Définitions 4.9.** – Si  $H_\mu(\xi)$  est finie, alors l'entropie de  $f$  relativement à  $\xi$  est la quantité

$$h_\mu(f, \xi) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} H(\xi^n) < +\infty.$$

– L'entropie métrique de  $(X, f)$  relativement à  $\mu$  est alors la quantité

$$h_\mu(f) = \sup\{h_\mu(f, \xi), \xi, H_\mu(\xi) < +\infty\} \in [0, +\infty].$$

Pour un flot  $\varphi = (\varphi^t)$  sur  $X$ , on peut considérer les systèmes discrets  $(X, \varphi^T)$  pour chaque  $T > 0$  et leur entropie  $h_\mu(\varphi^T)$ . L'important

**Théorème 4.10.** ([15], II.6.THEOREM 1') Pour tout  $T, T' > 0$ ,  $\frac{1}{T}h(\varphi^T) = \frac{1}{T'}h(\varphi^{T'})$ .

motive la

**Définition 4.11.** L'entropie métrique d'un flot  $\varphi = (\varphi^t)$  par rapport à une mesure  $\mu$   $\varphi$ -invariante est la quantité  $h_\mu(\varphi) = h_\mu(\varphi^1) \in [0, \infty]$ .

Suite à la définition 4.9, on peut se demander si le supremum considéré est effectivement atteint. Le théorème suivant répond à la question :

**Théorème 4.12.** Si la partition  $\xi$  est génératrice, i.e.  $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}\xi = \mathcal{A}$ , alors  $h_\mu(f) = h_\mu(f, \xi)$ .

### 4.3. Variational principle.

**Théorème 4.13.** (Variational principle) Soient  $(X, d)$  métrique compact,  $f : X \rightarrow X$  un homéomorphisme. Alors

$$h_{top}(f) = \sup\{h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}(f)\}.$$

*Références de preuve.* La preuve la plus élégante et la plus répandue aujourd'hui dans les livres est celle que l'on trouve dans [11] ou [6], originellement due à Misiurewicz. La première preuve complète est cependant due à Goodman ([8]).  $\square$

Ce théorème amène naturellement les questions suivantes : ce supremum est-il atteint ? Et si oui, l'est-il pour une unique mesure ? La partie 5 répondra par un double oui à cette question dans le cas d'un flot d'Anosov topologiquement mélangeant. De nombreux autres cas, plus délicats, ont été traités dans la littérature, mais nous n'en parlerons pas.

Pour illustrer tout ceci, nous donnons tout de suite, et sans preuve, les résultats concernant le flot géodésique sur les surfaces hyperboliques, et les questions qu'ils amènent à propos de leur généralisation dans le cas des métriques de Hilbert.

**4.4. L'entropie du flot géodésique sur une surface hyperbolique.** On considère une surface lisse compacte  $M$  de genre  $g \leq 2$ , munie d'une métrique hyperbolique, c'est-à-dire de courbure négative constante. Cette surface peut être topologiquement et métriquement obtenue (en transportant la métrique hyperbolique) comme le quotient du disque de Poincaré  $\mathbb{D}$  par un sous-groupe  $\Gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$  isomorphe au groupe fondamental  $\pi_1(M)$  de  $M$ . Ce groupe  $\Gamma$  n'est bien sûr pas unique, en choisir un revient à fixer une certaine structure hyperbolique sur la surface.

Les géodésiques de  $M$  sont les projections des géodésiques de  $\mathbb{D}$  sur  $M$  via  $\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \setminus \Gamma$ . Le choix de la structure hyperbolique (i.e. du groupe  $\Gamma$ ) ne change en rien la dynamique du flot

géodésique sur  $M$  : c'est toujours un flot d'Anosov topologiquement mélangeant. D'après le théorème annoncé, il existe une unique mesure  $\mu$  d'entropie maximale, c'est-à-dire vérifiant  $h_\mu(\varphi) = h_{top}(\varphi)$ . Cette mesure n'est autre que la mesure de Liouville sur  $M$ , autrement dit le volume associé à la métrique hyperbolique. Dans ce cas, on sait "facilement" calculer  $h_\mu(\varphi)$  en utilisant la formule de Pesin, valable dès que la mesure  $\mu$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $M$  :

$$h_\mu(\varphi) = \sum_i \int_M \chi_i^+(x) d\mu(x).$$

Ici, les  $(\chi_i^+(x))_i$  représentent les exposants de Lyapunov positifs de  $x$ . Dans le cas du flot géodésique d'une surface hyperbolique, il n'y en a qu'un seul, qui est constant sur  $M$ . Si on normalise la courbure à  $-1$ , cet exposant se calcule simplement et vaut exactement 1. Ainsi, l'entropie topologique vaut 1.

Revenons en arrière, à la donnée de notre surface lisse compacte  $M$ , de genre  $g \geq 2$ . Elle peut s'obtenir comme un quotient  $\Omega \backslash \Gamma$  où  $\Omega$  est un ouvert strictement proprement convexe de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  et  $\Gamma$  est un sous-groupe discret sans torsion de  $PGL(3, \mathbb{R})$  qui préserve  $\Omega$ . Par exemple, on peut prendre pour  $\Omega$  l'intérieur d'une ellipse, c'est-à-dire un disque  $\mathbf{D}$  du plan projectif. Si on munit  $\mathbf{D}$  de la métrique de Hilbert, cela donne le modèle de Klein du plan hyperbolique, et le sous-groupe de  $PGL(3, \mathbb{R})$  qui préserve  $\mathbf{D}$  s'identifie à  $PSL(2, \mathbb{R})$ .

Mais d'autres convexes  $\Omega$ , qui ne soient pas des disques, peuvent aussi convenir, c'est-à-dire être divisés par un groupe  $\Gamma$  pour que  $M = \Omega \backslash \Gamma$  (c.f. [7] par exemple). La structure ainsi obtenue sur la surface n'est plus riemannienne. Comme vu en 3.3, elle est finslérienne.

Dans tous les cas, peu importe laquelle de ces structures on met sur  $M$ , le flot géodésique sera toujours d'Anosov et topologiquement mélangeant. Et il y aura toujours une unique mesure d'entropie maximale. Les résultats suivants empêchent par contre de mener les calculs de l'entropie de la façon précédente, ouvrant de nombreuses questions, en particulier de savoir si la valeur de l'entropie topologique dépend de la structure.

**Théorème 4.14.** *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\Omega$  est un disque ;
- (ii) le bord  $\partial\Omega$  est de classe  $C^\alpha$  pour tout  $\alpha < 2$  ;
- (iii) le flot géodésique admet une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue.

## 5. ORBITES PÉRIODIQUES : LES DÉCRIRE, LES COMPTER

Toujours dans l'ordre anti-chronologique, on donne deux développements réellement différents, qui permettent de prouver, entre autres, le théorème annoncé à la fin de 4.3. Chacun d'entre eux a un intérêt propre pour les informations qu'il donne sur le système dynamique.

**Théorème 5.1.** *Soient  $M$  une variété riemannienne compacte,  $\varphi = \{\varphi^t\}$  un flot d'Anosov  $C^1$  sur  $M$  et topologiquement mélangeant. Alors il existe une unique mesure  $\mu$  d'entropie maximale, i.e. telle que  $h_\mu(\varphi) = h_{top}(\varphi)$ .*

**5.1. Mesure de Bowen.** Dans [4] et [5], Rufus Bowen montre que sur une variété hyperbolique, les géodésiques fermées sont uniformément réparties selon la mesure de Liouville associée. (En fait, il le montre pour une classe un peu plus large de systèmes.)

Nous allons voir ici, de façon un peu plus générale, que les orbites périodiques d'un flot d'Anosov  $\varphi$  topologiquement mélangeant sont uniformément réparties selon "la" mesure qui maximise l'entropie métrique. Dans le cas des variétés hyperboliques, cette mesure est justement la mesure de Liouville, comme on l'a vu dans la section 4.4. Pour cela, on montre le théorème 5.1 en construisant "la" mesure qui maximise l'entropie métrique comme limite d'une famille de mesures dont le support est porté par les orbites périodiques. Le "la" entre guillemets rappelle que l'unicité est encore à prouver.

Si  $\gamma$  est une orbite périodique pour  $\varphi$ , on note  $l(\gamma)$  sa période minimale et  $\delta_\gamma$  la mesure de Lebesgue sur  $\gamma$  (en identifiant  $\gamma$  avec l'intervalle  $[0, l(\gamma)]$  de  $\mathbb{R}$ ). Pour  $\epsilon > 0$  et  $t \geq 0$ , soit  $\text{Per}(t, \epsilon)$  l'ensemble des orbites périodiques dont une période est dans l'intervalle  $]t - \epsilon, t + \epsilon[$ , et  $L(t, \epsilon) = \sum_{\gamma \in \text{Per}(t, \epsilon)} l(\gamma)$ . On définit alors la mesure de probabilité  $\mu_{t, \epsilon}$  par

$$\mu_{t, \epsilon} = \frac{1}{L_{t, \epsilon}} \sum_{\gamma \in \text{Per}(t, \epsilon)} \delta_\gamma.$$

Cela nous donne une famille de mesures qui s'avère converger (au sens faible) vers une mesure  $\mu \in \mathcal{M}(\varphi)$ , i.e.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \mu_{t, \epsilon} = \mu.$$

On peut ainsi conclure en prouvant que, si  $\nu \in \mathcal{M}(\varphi)$  vérifie  $h_\nu(\varphi) = h_{top}(\varphi)$ , alors nécessairement  $\nu$  est un point d'accumulation de la famille  $(\mu_{t, \epsilon})_{t, \epsilon > 0}$ .

On montre au passage que la mesure  $\mu$  est ergodique et même mélangeante.

**5.2. Mesure(s) de Margulis.** Dans sa thèse, Margulis montre à la suite d'Anosov de nombreuses propriétés des  $U$ -flows. En particulier, dans [13], il construit des mesures, aujourd'hui à son nom, qui exploitent à fond les caractéristiques propres à un flot d'Anosov topologiquement mélangeant.

Par "ouvert de  $W_{(0)}^\pm$ ", on entend un ouvert d'une quelconque feuille de  $W_{(0)}^\pm$ . De même, lorsqu'on parle de mesure sur un feuilletage, il s'agit d'une famille de mesures dont chacune est portée par une feuille. Ce que fait Margulis, c'est, en gros, construire une famille "intelligente" de mesures sur les feuilletages stable  $W^-$  et instable  $W^+$ , puis considérer "localement" leur produit.

**Définition 5.2.** *Soient  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  deux feuilletages complémentaires de  $M$ , et  $\epsilon > 0$ . Deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathcal{F}_2$  sont dits  $\epsilon$ -équivalents s'il existe une application continue  $h : U \times [0, 1] \rightarrow V$  telle que*

- (1) *pour tout  $x \in U$ ,  $h(x, 0) = x$ ,  $h(x, 1) \in V$  ;*
- (2) *pour tout  $x \in U$ , l'application  $t \in I \mapsto h(x, t)$  est une courbe lisse tracée sur  $\mathcal{F}_1$ , de longueur inférieure à  $\epsilon$  ;*
- (3) *l'application  $x \in U \mapsto h(x, 1) \in V$  est un homéomorphisme de  $U$  dans  $V$ .*

Ici, nous considérons cette notion d'équivalence relativement aux feuilletages complémentaires  $W_0^-$  et  $W_0^+$  ou  $W_0^+$  et  $W_0^-$ .

**Théorème 5.3.** *Il existe une mesure  $\mu_0^-$  sur (une tribu contenant les Boréliens de)  $W_0^-$  vérifiant*

- (1)  $\mu_0^-$  est finie sur les compacts ;
- (2) si  $U$  est d'intérieur non vide, alors  $\mu_0^-(U) > 0$  ;
- (3) il existe un réel  $h^- > 0$  tel que, pour tout ouvert  $U$  de  $W_0^-$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\mu_0^-(\varphi^t(U)) = e^{h^-t} \mu_0^-(U);$$

- (4) si  $U$  et  $V$  sont deux ouverts  $\epsilon$ -équivalents de  $W_0^-$  pour un  $\epsilon > 0$ , alors  $\mu_0^-(U) = \mu_0^-(V)$ .

On construit de la même façon une mesure  $\mu_0^+$  sur le feuilletage faiblement instable  $W_0^+$ , mais avec une constante  $h^+ < 0$ .

*Idées de preuve.* L'idée est d'appliquer sur chaque feuille le théorème de représentation de Riesz. On cherche donc à traduire les propriétés voulues en terme de formes linéaires sur l'ensemble des fonctions continues à support compact sur chaque feuille. La proposition 3.4 joue un rôle crucial dans le raisonnement, car elle permet de voir qu'étant donné un ouvert  $U$  de  $W_0^-$ , alors il existe un  $\epsilon > 0$  tel que tout autre ouvert assez petit de  $W_0^-$  est  $\epsilon$ -équivalent à un sous-ensemble de  $U$ .  $\square$

De ces mesures, on déduit "par projection" des mesures  $\mu^+$  et  $\mu^-$  sur les feuilletages stable et instable. Explicitons les guillemets : on peut trouver des réels  $r_0, t_0 > 0$  assez petits pour que, si  $U$  soit un ouvert de  $W^\pm$  de diamètre inférieur à  $r_0$ , les ouverts  $\varphi^t(U)$  pour  $0 \leq t \leq t_0$  soient disjoints.  $\mu^\pm$  est alors définie de la façon suivante : si  $U$  est un ouvert de  $W^-$  de diamètre inférieur à  $r_0$  alors

$$(5.1) \quad \mu^\pm(U) = \frac{1}{\int_0^{t_0} e^{h^\pm t} dt} \mu_0^\pm\left(\bigcup_{0 \leq t \leq t_0} \varphi^t(U)\right).$$

La mesure d'un ouvert quelconque est obtenue en l'écrivant comme union disjointe d'ouverts assez petits.

Les propriétés (1),(2),(3) de  $\mu_0^\pm$  restent valables pour  $\mu^\pm$ . Par contre, on perd globalement la propriété (4) :

**Proposition 5.4.** *Pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que, si  $U$  et  $V$  sont  $\epsilon$ -équivalents, alors*

$$\left| \frac{\mu^\pm(U)}{\mu^\pm(V)} - 1 \right| < \delta.$$

On construit à partir de là une mesure  $\mu_M$  sur  $M$ , en considérant localement (au sens précédent) le produit  $\mu^- \times \mu_0^+$ . Pour cela, soit  $U(x) = U^-(x) \times U_0^+(x)$  un cube produit, voisinage ouvert de  $x \in M$ . Considérons les projections  $\pi_0^+ : U(x) \rightarrow U_0^+(x)$  sur la base faiblement instable et  $\pi^- : U(x) \rightarrow U^-(x)$  sur la base stable. Si  $U$  est un ouvert de  $M$  inclus dans  $U(x)$ , on définit une fonction "hauteur"  $f_{U,U(x)}$  par

$$f_{U,U(x)} : \begin{array}{ccc} U_0^+(x) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \mu(U^-(y) \cap U). \end{array}$$

La mesure  $\mu_M$  d'un tel ouvert  $U$  est alors définie par :

$$\mu_M(U) = \int_{y \in U_0^+(x)} f_{U,U(x)}(y) d\mu_0^+(y),$$

et on en déduit immédiatement une mesure de Borel  $\mu_M$  sur  $M$ . Bien sûr, cela nécessite des vérifications, en particulier sur le comportement de  $f_{U,U(x)}$  et sur la dépendance vis-à-vis du choix du point  $x$  et de l'ouvert  $U(x)$ .

Margulis remarque aussi dans sa thèse que la construction symétrique, en considérant les feuilletages instable et faiblement stable, donne la même mesure.

**Proposition 5.5.** *La mesure  $\mu_M$  ainsi obtenue est invariante par le flot  $\varphi$ .*

*Démonstration.* Des propriétés de  $\mu_0^+$  et  $\mu^-$  (théorème 5.1) et de la définition locale de  $\mu$ , on a pour tous ouvert  $U$  de  $M$  et  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\mu_M(\varphi^t(U)) = e^{(h^- + h^+)t} \mu_M(U).$$

En faisant  $U = M$ , on en déduit que  $h^+ = -h^-$ , et du coup, l'égalité précédente donne l'invariance par le flot.  $\square$

Il s'avère en fait que

**Proposition 5.6.**

$$h^- = h_{top}(\varphi) = -h^+.$$

### 5.3. Mesure de Bowen-Margulis.

**Théorème 5.7.** *Bowen et Margulis ont construit la même mesure.*

Dorénavant, par souci de neutralité, on notera indifféremment  $\mu$  la mesure  $\mu_M$  de Margulis ou la mesure  $\mu_B$  de Bowen.

### 5.4. Où on compte les orbites périodiques (sans s'endormir).

**Théorème 5.8.** *Soit  $\varphi = \{\varphi^t\}$  un flot d'Anosov topologiquement mélangeant sur une variété riemannienne compacte  $M$ . Le nombre  $n(t, \varphi)$  d'orbites périodiques du flot de longueur plus petite que  $t \geq 0$  se comporte asymptotiquement comme*

$$n(t, \varphi) \sim \frac{e^{th_{top}(\varphi)}}{th_{top}(\varphi)}.$$

Le lien entre orbites périodiques et entropie est déjà apparu dans la construction de la mesure de Bowen. Cependant, la partie technique de la preuve que l'on donne ici, et qui suit pour l'essentiel les livres [11] et [14], repose sur les propriétés de la mesure de Margulis. La preuve est en deux temps : le premier (5.4.1 et 5.4.2) est doublement local, et le second (5.4.3), (nécessairement,) doublement global.

5.4.1. *Un cube flottant (parfois appelé boîte flottante).* Soit  $B$  un cube flottant, que l'on construit ainsi : soient  $p \in M$  et  $B^-(p, \delta)$  la boule de centre  $p$  et de rayon  $\delta$  de la feuille stable  $W^-(p)$  de  $p$ . Pour  $w \in B^-(p, \delta)$ , on considère  $B^+(w, \delta)$  et son image par le flot,

$$B_0^+(w, \epsilon, \delta) = \bigcup_{0 \leq t \leq \epsilon} \varphi^t(B^+(w, \delta)),$$

qui représente un morceau de la feuille faiblement instable  $W_0^+(w)$  de  $w$ . Le cube flottant est obtenu en faisant la réunion de ces morceaux de feuilles pour  $w \in B^-(p, \delta)$ , autrement dit :

$$B = \bigcup_{w \in B^-(p, \delta)} B_0^+(w, \epsilon, \delta) = \bigcup_{w \in B^-(p, \delta)} \bigcup_{0 \leq t \leq \epsilon} \varphi^t(B^+(w, \delta)).$$

On aura choisi  $\epsilon$  assez petit pour que tous les  $\varphi^t(B^+(w, \delta))$ , pour  $w \in B^-(p, \delta)$ , soient disjoints. (On prend  $\epsilon \leq t_0$ , où  $t_0$  est comme dans la définition (5.1).) Egalement,  $\delta$  est choisi de telle façon que

- si  $x, y \in M$  vérifient, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $d(\varphi^t(x), \varphi^t(y)) < \delta$ , alors  $x = \varphi^s(y)$ , pour un certain  $s \in (-\delta, \delta)$ .
- si  $U$  et  $V$  sont deux ouverts  $\delta$ -équivalents de  $W^\pm$ , alors  $|\frac{\mu^\pm(U)}{\mu^\pm(V)} - 1| < \epsilon$ . (Comme dans la proposition 5.4, en inversant les lettres...)



Si on note  $\varphi.w$  l'orbite d'un point  $w \in M$ , chaque point  $x$  d'un tel cube flottant est, par construction, sur un unique segment géodésique  $[x] \subset \varphi.x \cap B$ , dont la longueur est exactement  $\epsilon$ ;  $[x]$  correspond à la composante connexe de  $x$  dans  $\varphi.x \cap B$ ; on dira que  $x \sim y$  dans  $B$  si  $[x] = [y]$ , autrement dit s'il existe  $t \in [0, \epsilon]$  tel que  $x = \varphi^{\pm t}(y)$ . On note  $B^+(x)$  la composante connexe de  $x$  dans  $W^+(x) \cap B$ ;  $B^-(x), B_0^-(x), B_0^+(x)$  sont de même définies.

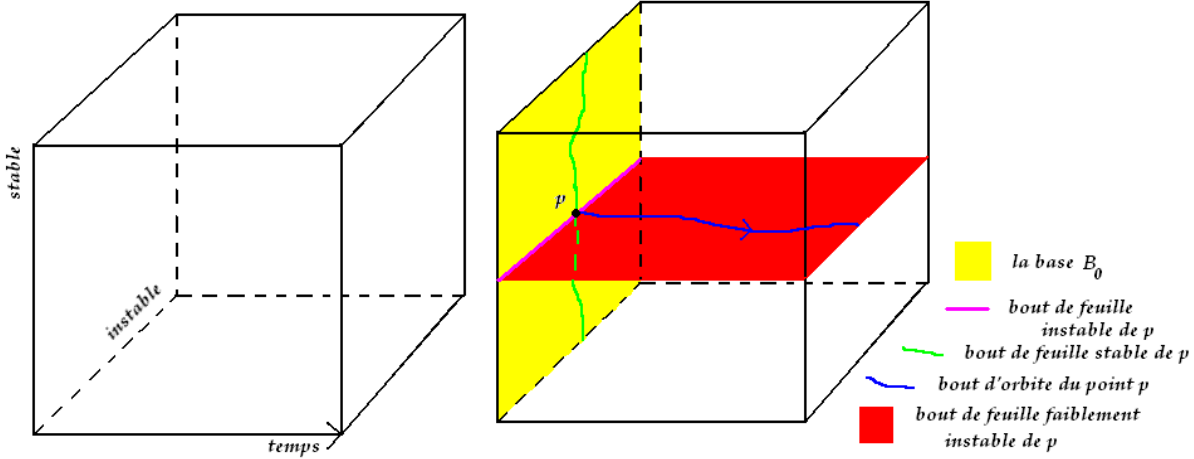


FIG. 2. Un cube flottant.

On appelle base de  $B$  l'ensemble  $B_0 = \bigcup_{w \in B^-(p, \delta)} B^+(w, \delta)$ . Par construction de  $B$ , tout point  $x \in B$  s'écrit de façon unique

$$x = \varphi^{\tau(x)}(\pi(x)),$$

où  $\tau(x) \in [0, \epsilon]$ ,  $\pi(x) \in B_0$ , ce qui définit deux applications continues (surjectives)

$$\pi : B \longrightarrow B_0 \text{ et } \tau : B \longrightarrow [0, \epsilon].$$

L'application  $\pi$  paramétrise les classes d'équivalence pour  $\sim$  au sens où  $\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow x \sim y$ . La fonction  $\tau$  est constante sur  $B^+(x)$  pour tout  $x \in B$ . Par contre, elle n'est pas constante sur  $B^-(x)$ , et par suite, pour  $\epsilon' \in [0, \epsilon]$ , l'ensemble  $\tau^{-1}(\epsilon')$  ne représente rien par rapport à nos feuilletages. Malgré tout, par absolue des feuilles stables, on peut supposer (et c'est ce qu'on fera)  $\delta$  assez petit pour que le diamètre de  $\tau(B^-(x)) \subset (0, \epsilon)$  soit inférieur à  $\epsilon^2$ . Ce sera notamment crucial pour le lemme 5.12.

5.4.2. *Etude de  $\varphi^T(B)$  et  $\varphi^T(B) \cap B$ .* Fixons un grand  $T > 0$ . Ce qu'on fait dans cette partie, c'est compter le nombre d'orbites périodiques dont une période est comprise entre  $T - \epsilon$  et  $T + \epsilon$  et qui coupent le cube flottant  $B$ ; bien sûr, une telle orbite peut couper  $B$  plusieurs fois, et on prendra en compte cette multiplicité. Comme en 5.1,  $\text{Per}(T, \epsilon)$  désigne l'ensemble des orbites périodiques dont une période est dans l'intervalle  $(T - \epsilon, T + \epsilon)$ ; on note  $n(T, \epsilon)$  le cardinal de  $\text{Per}(T, \epsilon)$ ,  $n(T, \epsilon, B)$  le nombre d'orbites périodiques de  $\text{Per}(T, \epsilon)$  qui coupent  $B$ , comptées avec multiplicité.

On observe que, si  $x \in B$  et  $\varphi.x \in \text{Per}(T, \epsilon)$ , alors  $\varphi^T([x]) \cap [x] \neq \emptyset$ . On s'intéresse ainsi à l'ensemble  $\varphi^T(B) \cap B$  que toutes les orbites de  $\text{Per}(T, \epsilon)$  intersectent. Sous l'action du flot, le cube flottant est exponentiellement contracté selon la direction stable (verticalement sur le dessin), exponentiellement dilaté selon la direction instable (dans la profondeur), et sa "longueur temporelle", bien sûr, reste inchangée. Autrement dit,  $\varphi^T(B)$  ressemble à un très long ruban très fin, comme sur la figure 3, et va intersecter plein de fois le cube original  $B$ .

Une composante connexe de  $\varphi^T(B) \cap B$  est toujours un "sous-cube flottant" de  $B$ , qui peut prendre basiquement trois formes; elles sont représentées sur la figure 4. On donne une définition mathématique pour la forme 1, qui on va le voir, est la plus courante :

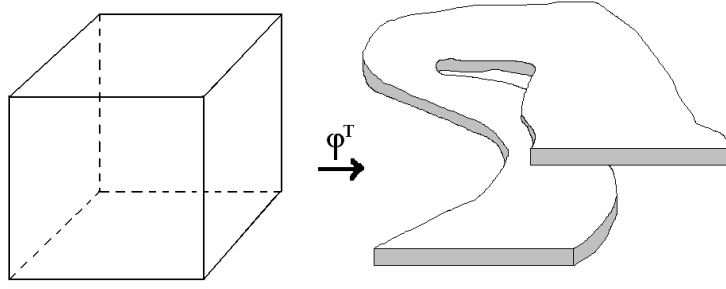
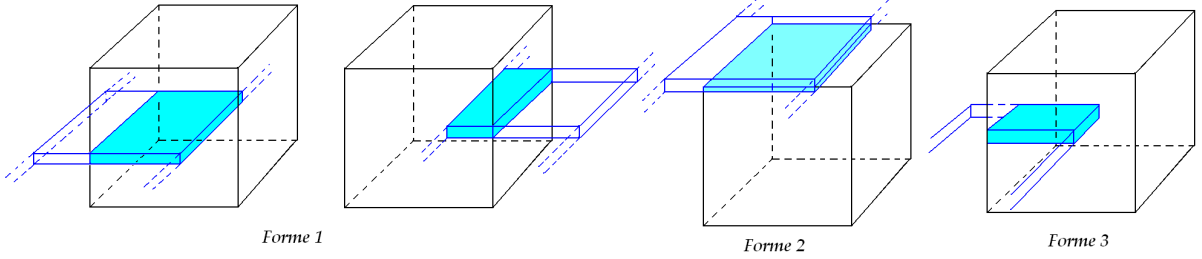


FIG. 3. Action du flot sur le cube flottant.

FIG. 4. Formes possibles pour une composante connexe de  $\varphi^T(B) \cap B$ .

**Définition 5.9.** Une composante connexe  $\Delta$  de  $\varphi^T(B) \cap B$  a la forme 1 si les conditions suivantes sont vérifiées pour tout  $\varphi^T(x) \in \Delta, x \in B$  :

- (1)  $\varphi^T(B^-(x)) \subset B^-(\varphi^T(x)) \subset B$  ;
- (2)  $B^+(\varphi^T(x)) \subset \varphi^T(B)$ .

La première condition exclut ainsi la forme 2, et la seconde la forme 3.

Si  $\Delta$  est une composante connexe  $\Delta$  de  $\varphi^T(B) \cap B$  de forme 1, alors  $\Delta$  intersecte soit  $B_0$  soit  $\varphi^\epsilon(B_0)$  selon que  $\Delta$  pénètre  $B$  par devant (cas +) ou par derrière (cas -) (c.f. figure 4). On note

- $t^\pm(x) = \sup\{t, 0 \leq t \leq \epsilon, \varphi^{\pm t}(x) \in \Delta\}$  la profondeur de  $\Delta$  au point  $x \in B_0 \cap \Delta$  (ou  $x \in \varphi^\epsilon(B_0) \cap \Delta$  dans le cas -) ;
- $T(\Delta) = \sup_x t^\pm(x)$  la profondeur maximale de  $\Delta$  dans  $B$  ;
- $t(\Delta) = \inf_x t^\pm(x)$  la profondeur minimale de  $\Delta$  dans  $B$ .

**Définition 5.10.** Une composante connexe  $\Delta$  de  $\varphi^T(B) \cap B$  de forme 1 est dite dégénérée si  $t(\Delta) = 0$ . Sinon, elle est dite non dégénérée.

En gros, ce sont celles qui ne pénètrent pas dans  $B$  dans toute leur épaisseur (selon la direction stable).

**Lemme 5.11.** Chaque composante connexe de  $\varphi^T(B) \cap B$  de forme 1 (resp. de forme 1 non dégénérée) est traversée par au plus (resp. exactement) une orbite périodique de  $\text{Per}(T, \epsilon)$ .

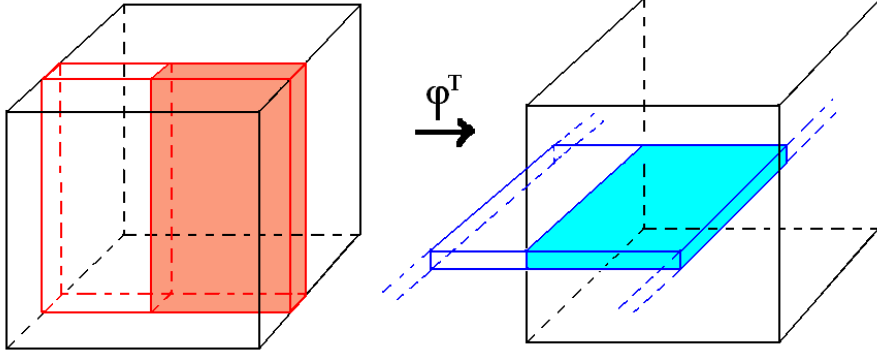
*Preuve.* Soit  $\Delta_1$  une composante connexe de  $\varphi^T(B) \cap B$  de forme 1 non dégénérée. C'est l'image par  $\varphi^T$  d'une sous-boîte flottante  $D_0$  de la forme

$$D_0 = \bigcup_{w \in B^-(p, \delta)} \bigcup_{0 \leq t \leq \epsilon'} \varphi^t(B^+(w, \delta')),$$

ou

$$D_0 = \bigcup_{w \in B^-(p, \delta)} \bigcup_{\epsilon' \leq t \leq \epsilon} \varphi^t(B^+(w, \delta')),$$

où  $\delta' \leq \delta$ ,  $\epsilon' \leq \epsilon$ . (Voir la figure 5.)

FIG. 5.  $D_0 = \varphi^{-T}(\Delta_1)$  et  $\Delta_1$ .

Soit alors  $\tilde{\Delta}_1 = \cup_{y \in \Delta_1} [y]$  la "prolongée" de  $\Delta_1$ .  $\tilde{\Delta}_1$  rencontre nécessairement  $D_0$  en un plus petit compact  $D_1 = \tilde{\Delta}_1 \cap D_0$  qui est encore une sous-boîte flottante de  $B$ , strictement incluse dans  $D_0$ . Par récurrence, on construit ainsi des sous-boîtes flottantes  $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , strictement emboîtées. Les intersections  $D = \cap_{n \in \mathbb{N}} D_n$  et  $\Delta = \cap_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$  sont non vides et consistent en un (petit) compact inclus dans feuille faiblement instable.

Maintenant, "revenons en arrière". Soit  $\tilde{D} = \cup_{y \in D} [y]$  le prolongé de  $D$ , et  $\Delta^1 = \tilde{D} \cap \Delta$ . L'image  $D^1 = \varphi^{-T}(\Delta^1)$  est une sous-boîte flottante stricte de  $D$ . On construit par récurrence les suites  $(\Delta^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(D^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de sous-boîte flottantes de  $\Delta$  et  $D$ , strictement emboîtées.

Les intersections  $d = \cap_{n \in \mathbb{N}} D^n$  et  $d' = \cap_{n \in \mathbb{N}} \Delta^n$  sont des parties connexes compactes d'une même orbite  $O$ , i.e.  $\tau(d) = \tau(d')$  est réduit à un point. Par construction,  $O \in \text{Per}(T, \epsilon)$  et  $O$  traverse  $\Delta_1$ .

Réciproquement, supposons que  $\gamma \in \text{Per}(T, \epsilon)$  traverse  $\Delta_1$ . Par construction,  $\gamma$  traverse aussi  $D_1$  et  $\Delta_2$ , et par suite tous les  $D_n$  et tous les  $\Delta_n$ ; ainsi,  $\gamma$  traverse  $D$  et  $\Delta$ . De la même façon,  $\gamma$  traverse aussi  $d$  et  $d'$ . Autrement dit,  $\gamma = O$ , ce qui donne le résultat.

Remarquons que, dans le cas où  $\Delta_1$  est dégénérée, il se peut que les intersections  $D$  et  $\Delta$  soient vides; cela signifie qu'alors  $\Delta_1$  n'est pas traversée par une orbite périodique de  $\text{Per}(T, \epsilon)$ .  $\square$

Introduisons, pour  $x \in B$ , les distances  $\delta^\pm(x) = \sup\{r > 0 \mid B^\pm(x, r) \subset B\}$ , distances au bord de  $B$  en suivant le feuilletage stable (-) ou instable (+). On regarde alors des cubes plus petits que  $B$ , définis par

$$B^\pm(r) = \{x \in B \mid \delta^\pm(x) > r\}, \quad B(r) = B^+(r) \cap B^-(r).$$

Le lemme suivant caractérise les composantes connexes de  $\varphi^T(B) \cap B$  de forme 1, et donne un critère de non dégénérescence.

**Lemme 5.12.** (i) Pour tout  $T > 0$ , il existe un réel  $r(T) > 0$ , exponentiellement décroissant avec  $T$ , tel que, si  $\Delta$  est une composante connexe de  $\varphi^T(B) \cap B$ , alors :

$$\Delta \text{ est de forme 1} \iff \Delta \cap B^-(r(T)) \neq \emptyset, \quad \varphi^{-T}(\Delta) \cap B^+(r(T)) \neq \emptyset.$$

(ii) Soit  $\Delta$  est une composante connexe de  $\varphi^T(B) \cap B$  de forme 1. Si  $T(\Delta) \geq \epsilon^2$ , alors  $\Delta$  est non dégénérée.

*Preuve.* (i) Soit  $\Delta$  une composante connexe de  $\varphi^T(B) \cap B$ . Rappelons que c'est un sous-cube flottant de  $B$ , c'est-à-dire qu'elle est formée de morceaux de feuilles faiblement instables.

Comme le flot dilate exponentiellement les distances sur le feuilletage instable, il existe un réel  $r^+(T) > 0$  tel que si un élément  $y \in \Delta$  vérifie  $\delta^+(\varphi^{-T}(y)) > r^+(T)$ , alors pour tout  $z \in \Delta$ ,  $B^+(\varphi^T(z)) \subset \varphi^T(B)$ , soit la condition (1) de la définition 5.10.

De même, comme le flot contracte exponentiellement les distances sur le feuilletage stable, il

existe un réel  $r^-(T) > 0$  tel qu'on ait la condition (2) pour tout  $z \in \Delta$  dès qu'il existe  $y \in \Delta$  vérifiant  $\delta^-(y) > r^-(T)$ .

On a l'implication de droite à gauche en prenant  $r(T) = \max(r^-(T), r^+(T))$ . L'autre est évidente.

(ii) Cela découle du choix fait pour  $\delta$  à la fin de (5.4.1). En effet, on a alors, pour toute composante connexe  $\Delta$  de  $\varphi^T(B) \cap B$  de forme 1  $T(\Delta) - t(\Delta) < \epsilon^2$ ; d'où (ii).  $\square$

On note  $C_1(B, T)$  l'ensemble des composantes connexes de  $\varphi^T(B) \cap B$  de forme 1,  $n_1(B, T)$  le cardinal de  $C_1(B, T)$ . Idem pour  $C_1(B(r(T)), T)$  et  $n_1(B(r(T)), T)$ . On déduit de tout ce qui précède le

**Corollaire 5.13.**

$$n_1(B(r(T)), T) \leq n(T, \epsilon - \epsilon^2, B(r(T))) \leq n_1(B, T) \leq n(T, \epsilon, B(r(T))) \leq n(T, \epsilon, B).$$

Notons pour simplifier  $h = h_{top}(\varphi)$ .

**Proposition 5.14.**

$$n(T, \epsilon, B) = 2e^{hT} \mu(B)(1 + O(\epsilon))(1 + o(T^0)).$$

*Preuve.* On va calculer  $n_1(B, T)$  via deux expressions de  $\mu(\varphi^T(B) \cap B)$ , puis utiliser l'encadrement précédent.

D'une part, la mesure  $\mu$  étant  $\varphi$ -invariante et mélangeante, on a :

$$(5.2) \quad \mu(\varphi^T(B) \cap B) = \mu(\varphi^T(B))\mu(B) + o(T^0) = \mu(B)^2(1 + o(T^0)).$$

D'autre part, on écrit :

$$\mu(\varphi^T(B) \cap B) = \mu((\varphi^T(B) \cap B) \setminus C_1(B, T)) + \mu(C_1(B, T)).$$

Or, puisque  $r(T)$  décroît exponentiellement vite vers 0,  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mu(B^\pm(T))}{\mu(B)} = 1$ . Et, par définition de  $C_1(B, T)$ , on a

$$\mu((\varphi^T(B) \cap B) \setminus C_1(B, T)) \leq \mu(B \setminus B^-(T)) \longrightarrow 0,$$

d'où

$$(5.3) \quad \mu(\varphi^T(B) \cap B) = \mu(C_1(B, T)) + o(T^0).$$

Si  $\mu_1(B, T) = \frac{\mu(C_1(B, T))}{n_1(B, T)}$  est la moyenne des mesures d'une composante connexe de  $\varphi^T(B) \cap B$  de forme 1, on a

$$\mu(C_1(B, T)) = n_1(B, T)\mu_1(B, T)$$

et on voit apparaître le convoité  $n_1(B, T)$  qui vérifie, via (5.2) et (5.3) :

$$n_1(B, T)\mu_1(B, T) = \mu(B)^2(1 + o(T^0))$$

Pour notre choix de  $\delta$ , comme  $T(\Delta) - t(\delta) < \epsilon^2$ , la profondeur de pénétration de  $\Delta$  dans  $B$  au point  $x$  s'écrit  $t^\pm(x) = T(\Delta)(1 + O(\epsilon^2))$ . En notant, comme précédemment,  $\tilde{\Delta} = \cup_{y \in \Delta_1} [y]$ , on a ainsi

$$(5.4) \quad \mu(\Delta) = \mu(\tilde{\Delta}) \frac{T(\Delta)(1 + O(\epsilon^2))}{\epsilon} = \mu(\tilde{\Delta}) \frac{T(\Delta)}{\epsilon} (1 + O(\epsilon)).$$

Les deux lemmes suivants vont permettre de conclure.

**Lemme 5.15.**  $\mu(\tilde{\Delta}) = \mu(B)e^{-hT}(1 + O(\epsilon))(1 + o(T^0))$ .

*Preuve.*  $\tilde{\Delta}$  est une contraction du cube  $B$  : c'est exactement une composante connexe de  $\varphi^{T+\alpha}(B) \cap B$ , pour un  $\alpha \in [-\epsilon, \epsilon]$ . Avec notre choix de  $\delta$ , si  $x \in B$ ,  $y \in B^+(x)$ , on a

$$\mu(\varphi^{T+\alpha}(B^-(y))) = e^{-h(T+\alpha)} \mu(B^-(x))(1 + O(\epsilon)) = e^{-hT} \mu(B^-(x))(1 + O(T^0))(1 + O(\epsilon)).$$

Par produit local, on en déduit donc le résultat.  $\square$

Intuitivement, le flot étant topologiquement mélangeant, on se doute du

**Lemme 5.16.** *La profondeur de pénétration moyenne  $T_{moy}$  est  $\epsilon/2$ .*

*Démonstration.* Soit  $n \geq 1$ . On divise  $B$  en  $n$  sous boîtes  $(S_i)_{1 \leq i \leq n}$ ,

$$S_i = \bigcup_{t_{i-1} \leq t \leq t_i} \varphi^t(B_0),$$

où  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \epsilon$  sont choisis de telle sorte que pour tout  $i$ ,  $\mu(S_i) = \frac{\mu(B)}{n}$ .

Soit alors  $S = \bigcup_{t(n) \leq t \leq \epsilon} \varphi^t(B_0) \subset S_n$ , où  $t(n)$  est choisi pour que  $\mu(S) = \frac{\mu(B)}{n^2} = O(\frac{\mu(S_i)}{n})$ .

Chaque composante connexe  $\Delta$  de  $\varphi^T(B) \cap B$  contient une unique composante connexe  $\Delta_S$  de  $\varphi^T(S) \cap B$ , et  $T(\Delta) = T(\Delta_S)$ . Or, pour  $i \in \{1..n\}$ , le nombre  $N_i$  de composantes connexes  $\Delta_S$  de  $\varphi^T(S) \cap B$  tels que  $\frac{i-1}{n} \leq T(\Delta_S) < \frac{i}{n}$  vaut

$$N_i = \frac{1}{\mu(B)} \frac{\mu(\varphi^T(S) \cap S_i)}{\mu(S)} (1 + O(\frac{1}{n})) = \frac{1}{n} (1 + O(T^0)) (1 + O(\frac{1}{n})),$$

la dernière égalité venant du fait que  $\mu$  est mélangeante. Ainsi,  $N_i$  est (à quelque chose près) indépendant de  $i$  et on a le lemme. Proprement dit (écrit ?), cela donne :

$$\begin{aligned} \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} N_i &\leq T_{moy} \leq \epsilon \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} N_i, \\ \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=1}^n i N_i - \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=1}^n N_i &\leq T_{moy} \leq \frac{\epsilon}{n} \sum_{i=1}^n i N_i. \end{aligned}$$

Mais

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i = O(\frac{1}{n}) (1 + O(T^0))$$

et

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n i N_i = \frac{1}{2} (1 + O(T^0)) (1 + O(\frac{1}{n})).$$

Ainsi, en passant à la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a  $T_{moy} = \epsilon/2$ . □

5.4.3. *Retour à la preuve de la proposition 5.14.* Des deux lemmes et de la formule (5.4), on déduit :

$$\mu_1(B, T) = \frac{1}{2} \mu(B) e^{-hT} (1 + O(\epsilon)) (1 + o(T^0)).$$

Au final, on obtient donc

$$n_1(B, T) \mu_1(B, T) = n_1(B, T) \frac{1}{2} \mu(B) e^{-hT} (1 + O(\epsilon)) (1 + o(T^0)) = \mu(B)^2 (1 + o(T^0)).$$

Ainsi,

$$n_1(B, T) = 2e^{hT} \mu(B) (1 + O(\epsilon)) (1 + o(T^0)),$$

et

$$n_1(B(r(T)), T) = 2e^{hT} \mu(B(r(T))) (1 + O(\epsilon)) (1 + o(T^0)).$$

L'encadrement du corollaire 5.13 permet d'avoir, puisque  $\lim_{T \rightarrow \infty} \mu(B(r(T))) = \mu(B)$ ,

$$n(T, \epsilon - \epsilon^2, B(r(T))) = 2e^{hT} \mu(B) (1 + O(\epsilon)) (1 + o(T^0)).$$

Par conséquent,

$$n(T, \epsilon, B(r(T))) = 2e^{hT} \mu(B) (1 + O(\epsilon)) (1 + o(T^0)),$$

$$\text{et } n(T, \epsilon, B(r(T))) = n(T, \epsilon, B) (1 + o(T^0)).$$

Ce qui donne le résultat attendu. □

On peut maintenant terminer la

5.4.4. *Preuve du théorème 5.8.* On note pour simplifier  $n(T) = n(T, \varphi)$  le nombre d'orbites périodiques dont la période est inférieure à  $T$ .

Comme  $B$  ne contient que des bouts d'orbites de longueur  $\epsilon$ , on a, en se rappelant la construction de la mesure de Bowen :

$$n(T, \epsilon, B) \cdot \epsilon = \sum_{\gamma \in \text{Per}(T, \epsilon)} \delta_\gamma(B) = L_{T, \epsilon} \cdot \mu_{T, \epsilon}(B) = L_{T, \epsilon} \mu(B)(1 + o(T^0))(1 + o(\epsilon^0)).$$

Conjugué à la proposition précédente, cela donne :

$$(5.5) \quad L_{T, \epsilon} = 2\epsilon e^{hT} (1 + O(\epsilon))(1 + o(T^0)).$$

Or, on peut écrire

$$L_{T, \epsilon} = L_{\frac{T}{2}, \frac{\epsilon}{2}} + T_1(n(T + \epsilon) - n(T - \epsilon))$$

pour un certain  $T_1 \in (T - \epsilon, T + \epsilon)$ . L'expression (5.5) entraîne que

$$L_{\frac{T}{2}, \frac{\epsilon}{2}} = L_{T, \epsilon} e^{-hT/2} (1 + O(\epsilon))(1 + o(T^0)) = L_{T, \epsilon} o(T^0)(1 + O(\epsilon)).$$

En écrivant  $T_1 = T(1 + o(T^0))$ , on obtient avec (5.5) :

$$n(T + \epsilon) - n(T - \epsilon) = \frac{1}{T} L_{T, \epsilon} (1 + o(T^0)) = 2\epsilon \frac{e^{hT}}{T} (1 + O(\epsilon))(1 + o(T^0)),$$

et, par suite,

$$n(T) - n(T - 2\epsilon) = 2\epsilon \frac{e^{hT}}{T} (1 + O(\epsilon))(1 + o(T^0)).$$

Fixons  $T_0 > 0$  tel que  $n(T_0) = 0$  et soit  $N_{T, \epsilon} = \min\{n \geq 0 \mid T - 2n\epsilon \geq T_0\}$ . Alors

$$\begin{aligned} n(T) &= 2\epsilon \sum_{j=0}^{N_{T, \epsilon}-1} n(T - 2j\epsilon) - n(T - 2(j+1)\epsilon) \\ &= 2\epsilon \sum_{j=0}^{N_{T, \epsilon}-1} \frac{e^{h(T-2j\epsilon)}}{T - 2j\epsilon} (1 + O(\epsilon))(1 + o(T^0)) \\ &= \frac{e^{hT}}{T} \left[ 2\epsilon \sum_{j=0}^{N_{T, \epsilon}-1} \frac{T e^{-h2j\epsilon}}{T - 2j\epsilon} \right] (1 + O(\epsilon))(1 + o(T^0)) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N_{T, \epsilon}-1} 2\epsilon \frac{T e^{-h2j\epsilon}}{T - 2j\epsilon} &= \int_0^{T-T_0} \frac{T}{T-t} e^{-th} dt \\ &= T e^{-hT} \int_{T_0}^T \frac{e^{ht}}{t} dt \\ &= T e^{-hT} \left( \frac{e^{hT}}{hT} - \frac{e^{hT_0}}{hT_0} + \int_{T_0}^T \frac{e^{ht}}{ht^2} dt \right) \\ &= \frac{1}{h} (1 + o(T^0)). \end{aligned}$$

Finalement, comme  $\epsilon$  est arbitrairement petit, on a

$$n(T) = \frac{e^{hT}}{hT} (1 + o(T^0)),$$

autrement dit l'équivalent annoncé par le théorème.

## RÉFÉRENCES

- [1] D. V. Anosov. Geodesic flows on closed riemannian manifolds with negative curvature. *Proc. Inst. Steklov*, 90 :1–235, 1967.
- [2] Y. Benoist. Propriétés asymptotiques des groupes linéaires. *Geom. Funct. Anal.*, 7 :1–47, 1997.
- [3] Y. Benoist. Convexes divisibles 1. *Algebraic groups and arithmetic, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math.*, 17 :339–374, 2004.
- [4] R. Bowen. The equidistribution of closed geodesics. *Amer. J. Math*, 94 :413–423, 1972.
- [5] R. Bowen. Periodic orbits for hyperbolic flows. *Amer. J. Math*, 94 :1–30, 1972.
- [6] M. Brin and G. Stuck. *Introduction to dynamical systems*. Cambridge Univ. Press, 2002.
- [7] W. M. Goldman. Convex real projective structures on compact surfaces. *J. Diff. Geom.*, 31 :791–845, 1990.
- [8] T. N. T. Goodman. Relating topological entropy and measure entropy. *Bull. of the London Mathematical Society*, 3 :176–180, 1971.
- [9] J. Hadamard. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. *J. Mathématiques Pures et Appliquées*, 4 :27–73, 1898.
- [10] M. W. Hirsch and S. Smale. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic Press, 1974.
- [11] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge Univ. Press, 1995.
- [12] P. Kropotkine. *Mémoires d'un révolutionnaire*. Ed. Scala, 1989.
- [13] G. Margulis. Certain measures associated with  $\gamma$ -flows on compact manifolds. *Functional Analysis and Its Applications*, 4 :55–67, 1969.
- [14] G. A. Margulis. *On Some Aspects of the Theory of Anosov Systems*. Springer Monographs in Mathematics, 2004.
- [15] Ya. G. Sinai. *Topics in Ergodic Theory*. Princeton Univ. Press, 1994.