

PROCESSUS STOCHASTIQUES ET EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

Mickaël Crampon

ENS-Cachan Antenne de Bretagne, Rapport de Stage de Deuxième Année
Encadrant : Andrzej Roskosz

5 septembre 2005

De façon assez classique, le stage que j'ai effectué à Torun, en Pologne, a plus ressemblé à un stage de découverte qu'à un véritable stage de recherche. Ce rapport n'est pas exhaustif et présente les principales notions abordées. L'ouvrage de référence est celui de Karatzas et Shreve ([1]), l'introduction est largement inspirée de [5]. La majeure partie du texte montre les relations entre processus stochastiques, équations différentielles stochastiques et équations aux dérivées partielles.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Préliminaires	4
2.1	Martingales	4
2.2	Mouvement brownien	6
3	Construction de l'intégrale stochastique	9
3.1	Processus simples	9
3.2	Approximations et définition de l'intégrale	11
3.3	Extension aux martingales locales continues	13
3.4	La formule d'Itô	14
3.5	Applications de la formule d'Itô	15
4	Application à l'équation de la chaleur	17
4.1	Problème de Cauchy	17
4.1.1	Le cas borné	17
4.1.2	Approche plus fine	18
4.1.3	Un contre-exemple	20
4.1.4	Problèmes voisins	21
4.2	Problème de Dirichlet	21
4.2.1	Fonctions harmoniques et propriété de moyenne	22
4.2.2	Un résultat d'unicité	23
4.2.3	Ouvert réguliers	23
4.2.4	Exemples d'ouverts réguliers	26
5	Equations différentielles stochastiques	28
5.1	Solutions fortes	28
5.2	Lien avec les EDP	33
5.3	Solutions faibles	34
5.3.1	Le théorème de Girsanov	35
5.3.2	Applications	37
5.4	Quelques exemples	38
5.5	Problèmes non linéaires	39
6	Conclusion	40

1 Introduction

Afin d'introduire ce qui fera l'objet de tout le texte, nous allons faire appel à une fusée, partant de la Terre et à destination de la Lune. De façon classique, le mouvement $t \mapsto X_t$ de la fusée est régie par une équation différentielle du type

$$dX_t = A(X_t)dt,$$

où A est une application connue de \mathbb{R}^3 dans lui-même. Par exemple, cela peut traduire tout simplement le principe fondamental de la dynamique. Une solution d'une telle équation, de condition initiale X_0 vérifie l'équation intégrale

$$X_t = X_0 + \int_0^t A(X_t)dt.$$

Toutefois, la connaissance que l'on a des forces qui s'exerceront sur la fusée lorsqu'elle approchera la Lune est loin d'être exacte. De nombreuses forces inattendues peuvent en effet venir s'ajouter à celles que l'on ne peut ignorer, comme celle d'attraction de la Lune. En quelque sorte, ce sont des forces aléatoires d'origine inconnue, du bruit. On considère alors toutes les évolutions possibles de l'univers Ω , et le processus $(t, \omega) \mapsto Z_t(\omega)$ désigne les éléments ayant une influence sur le mouvement. On suppose alors que la variation du mouvement est directement proportionnelle aux variations des éléments inconnues et que naturellement, le coefficient de proportionnalité dépend de X . Ainsi,

$$dX_t = A(X_t)dt + b(X_t)dZ_t.$$

Une partie du travail qui suit sera de donner un sens précis à une telle équation, notamment au terme de bruit. La solution X d'une telle équation est également un processus sur Ω , et regroupe ainsi toutes les évolutions possibles de notre fusée. Les quantités intéressantes seront des moyennes et des probabilités, par exemple la probabilité que la fusée atterrisse à peu près au bon endroit. Par analogie avec le cas déterministe, on peut écrire

$$X_t = X_0 + \int_0^t A(X_t)dt + \int_0^t b(X_t)dZ_t.$$

On va dans la suite donner un sens à l'intégrale ci-dessus. Nous allons également définir puis étudier l'existence et l'unicité de solutions de telles équations et voir le lien entre ces équations et les équations aux dérivées partielles.

2 Préliminaires

Cette section présente les définitions et résultats essentiels pour la suite. Peu de démonstrations sont données. Elles peuvent être trouvées dans tout ouvrage traitant des martingales à temps continu (par exemple [1] ou [3]). $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ désigne toujours un espace de probabilité.

2.1 Martingales

Définition 2.1. $\{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ est une sous-martingale (resp. surmartingale) sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si

- (i) les vecteurs aléatoires réels $(X_t)_{t \geq 0}$ sont adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \subset \mathcal{F}^{[0, \infty[}$;
- (ii) pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$;
- (iii) pour tous réels $0 \leq s < t < \infty$, $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$ (resp. \leq).

Une martingale est à la fois une surmartingale et une sous-martingale.

Un processus à valeurs dans \mathbb{R}^d est une sous-martingale (resp. surmartingale) si ses coordonnées le sont.

Quelques abus :

- Lorsque le propos ne nécessitera pas davantage de précisions, on notera dorénavant $X = \{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$.
- On dira qu'un processus est continu, à droite et/ou à gauche, si ses trajectoires $t \mapsto X_t(\omega)$ le sont pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Proposition 2.2. Soient X une martingale et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, telle que $\mathbb{E}|\varphi(X_t)| < \infty$ pour tout $t \geq 0$. Alors le processus $\varphi(X)$ est une sous-martingale.

Le résultat reste vrai en dimension supérieure. En particulier, $\|X\|$ est une sous-martingale.

Théorème 2.3. (Inégalité de Doob) Soient X une sous-martingale positive, continue à droite, et $0 \leq t \leq T < \infty$. Alors, pour tout $1 < p < \infty$ tel que $\mathbb{E}[X_T^p] < \infty$, on a :

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s \in [t, T]} X_s\right)^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[X_T^p].$$

Théorème 2.4. (théorème de convergence) Soit X une sous-martingale continue à droite et uniformément intégrable ie $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$.

Alors $X_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ existe \mathbb{P} -ps. De plus, $\mathbb{E}[|X_\infty|] < \infty$.

Remarquons que la condition $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ est équivalente à $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[X_t^+] < \infty$. On déduit de ce théorème qu'une martingale converge toujours presque sûrement vers une variable aléatoire intégrable. Dans ce cas, on a aussi convergence en norme L^1 et pour tout réel $t \geq 0$, $X_t = \mathbb{E}[X_\infty | \mathcal{F}_t]$.

Définition 2.5. Une variable aléatoire réelle T est un temps d'arrêt relativement à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si pour tout $t \geq 0$, l'événement $\{T \leq t\}$ appartient à \mathcal{F}_t .

Théorème 2.6. (d'arrêt de Doob) Soient $\{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq \infty\}$ une sous-martingale continue à droite, $S \leq T$ deux temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Alors

$$\mathbb{E}[X_T | \mathcal{F}_S] \geq X_S \quad \mathbb{P} - ps.$$

En particulier, $\mathbb{E}[X_T] \geq \mathbb{E}[X_0]$.

Définition 2.7. On dira que la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \subset \mathcal{F}$ est complète si :

- $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est continue à droite ie $\bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$, $t \geq 0$.
- \mathcal{F}_0 contient tous les évènements négligeables de \mathcal{F} .

Dorénavant, on supposera que toutes les filtrations sont complètes.

Définition 2.8. Un processus X est dit de carré intégrable si pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[X_t^2] < \infty$. On note \mathcal{M}^2 l'espace vectoriel des martingales de carré intégrable, continues à droite, et de premier terme nul. \mathcal{M}_c^2 est le sous-espace de \mathcal{M}^2 constitué des martingales continues.

Pour $X \in \mathcal{M}^2$ et $t \geq 0$, on pose $\|X\|_t = \sqrt{\mathbb{E}[X_t^2]}$ et $\|X\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|X\|_{n \wedge 1}}{2^n}$.

Proposition 2.9. \mathcal{M}^2 muni de la métrique $\|\cdot\|$ est complet. \mathcal{M}_c^2 est un sous-espace fermé de \mathcal{M}^2 .

La proposition suivante permettra par la suite de construire l'intégrale stochastique. On se restreint au cas continu car il est plus simple à mettre en place et c'est le seul qui nous servira par la suite. La première partie est un cas particulier du théorème de décomposition de Doob-Meyer.

Proposition 2.10. (et définitions)

1. Pour toute martingale $X \in \mathcal{M}_c^2$, le processus X^2 est une sous-martingale continue et il existe un unique processus A , continu, croissant, tel que $A_0 = 0$, et qui fasse de $X^2 - A$ une martingale. On le note $\langle X \rangle$ et on l'appelle la variation quadratique de X .
2. Pour toutes martingales $X, Y \in \mathcal{M}_c^2$, le processus $\langle X, Y \rangle = \frac{1}{4}(\langle X + Y \rangle - \langle X - Y \rangle)$ est l'unique processus A , continu et localement à variation bornée vérifiant
 - $A_0 = 0$ \mathbb{P} -as ;
 - $XY - A$ est une martingale. $\langle X, Y \rangle$ est l'écart quadratique entre X et Y . Cela définit une application bilinéaire symétrique sur \mathcal{M}_c^2 .

Définitions 2.11. - Un processus X est une martingale locale s'il existe une suite de temps d'arrêt $(T_n)_{n \geq 0}$ croissant vers l'infini \mathbb{P} -ps et telle que, pour tous $n \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$, le processus $X_{T_n \wedge t}$ soit une martingale. Si $X_0 = 0$, on note $X \in \mathcal{M}^{loc}$.

- Un processus S est une semi-martingale continue s'il existe un processus A continu et à variation bornée qui fasse de $S - A$ une martingale locale continue. Dans ce cas, A est défini de façon unique à une constante près. En pratique, on prendra souvent $A_0 = 0$.

Lemme 2.12. (i) Toute surmartingale locale positive est une surmartingale.
(ii) Toute martingale locale uniformément intégrable est une martingale.

PREUVE : (ii) Soit $(M_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale et $(T_n)_{n \geq 0}$ une suite croissant vers l'infini \mathbb{P} -ps et telle que $(M_{t \wedge T_n})_{t \geq 0}$ soit une martingale. On suppose que $\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[|M_t|] < \infty$. Pour tous $n \geq 0$, $0 \leq s < t$, on sait que $\mathbb{E}[M_{t \wedge T_n} | \mathcal{F}_s] = M_{s \wedge T_n}$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ \mathbb{P} -ps en utilisant le théorème de convergence dominée pour le terme de gauche. Ainsi $(X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale. □

En particulier, en combinant ceci avec le théorème 2.4, on obtient un critère de convergence pour une martingale locale : il suffit qu'elle soit uniformément intégrable.

Proposition 2.13. (et définitions)

Pour toutes martingales locales continues $X, Y \in \mathcal{M}_c^{loc}$, il existe un unique processus A , continu et localement à variation bornée, noté $\langle X, Y \rangle$ vérifiant

- $A_0 = 0$ \mathbb{P} -as ;
- $XY - A \in \mathcal{M}_c^{loc}$.

$\langle X, Y \rangle$ est l'écart quadratique entre X et Y . Le processus croissant $\langle X \rangle = \langle X, X \rangle$ est appelé variation quadratique de X .

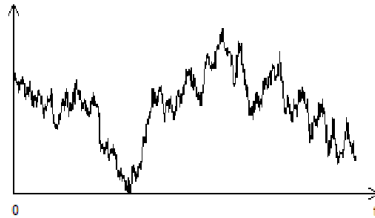
2.2 Mouvement brownien

Définition 2.14. On dit que $\{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ est un mouvement brownien partant de $x \in \mathbb{R}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ si :

- (i) les variables aléatoires réelles $(W_t)_{t \geq 0}$ sont adaptées à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \subset \mathcal{F}^{[0, \infty[}$;
- (ii) $W_0 = x$ \mathbb{P} -ps ;
- (iii) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $(n + 1)$ -uplet de réels $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$, les incréments $W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, W_{t_{n-1}} - W_{t_{n-2}}, \dots, W_{t_1} - W_{t_0}$ sont indépendants.
- (iv) pour tous réels $0 \leq s < t < \infty$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ suit la loi $\mathcal{N}(0, t - s)$.

Remarques :

- en particulier, la variable aléatoire W_t suit la loi $\mathcal{N}(x, t)$ pour tout $t \geq 0$;
- de la même façon, on peut définir le mouvement brownien en d dimensions pour tout $d \in \mathbb{N}^*$. Chaque coordonnée est alors un mouvement brownien.
- Voici le tracé d'une trajectoire d'un mouvement brownien :



Théorème 2.15. Le mouvement brownien existe. La filtration associée peut être choisie complète.

PREUVE : Il existe plusieurs constructions du mouvement brownien. Deux sont données dans [1], chapitres 2.2 et 2.3. Le chapitre 2.7 montre comment rendre la filtration continue et complète.

□

Il est important de remarquer que, si on se donne un mouvement brownien W sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on peut le plonger dans l'espace $C([0, \infty[)$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \Omega \times [0, \infty[& \longrightarrow & C([0, \infty[) \times [0, \infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\omega, t) & \longmapsto & (\tilde{\omega}, t) & \longmapsto & \tilde{\omega}(t) = W_t(\omega) \end{array}$$

L'application $\tilde{\omega}$ est bien continue car W l'est. En fait, la construction la plus intuitive du mouvement brownien se base sur cet espace, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. La tribu considérée est la tribu borélienne. On montre qu'il existe une probabilité \mathbb{P} sur $(C([0, \infty[), \mathcal{B}(C([0, \infty[)))$, qui fasse des applications coordonnées $W_t(\omega) = \omega(t)$ un mouvement brownien partant de 0, relativement à leur filtration naturelle $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$. C'est le processus de Wiener, le mouvement brownien dit standard ou canonique. On en déduit pour toute probabilité μ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ l'existence d'une probabilité \mathbb{P}^μ sur $(C([0, \infty[), \mathcal{B}(C([0, \infty[)))$, qui fasse des applications coordonnées un mouvement brownien de distribution initiale μ .

Malheureusement, la filtration naturelle qu'on considère n'est pas complète, elle est seulement continue à gauche. Mais si on pose $\mathcal{F}_t^\mu = \sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N}^\mu)$ pour tout $t \geq 0$, avec $\mathcal{N}^\mu = \{F \subset \Omega; \exists G \in \mathcal{F}_\infty^W \text{ tel que } F \subset G, \mathbb{P}^\mu(G) = 0\}$, alors $(\mathcal{F}_t^\mu)_{t \geq 0}$ est complète et continue. On peut même éliminer la dépendance en μ en posant $\mathcal{F}_t = \bigcap_\mu \mathcal{F}_t^\mu$, qui reste complète et continue. De plus, relativement à cette filtration et sous toute probabilité \mathbb{P}^μ , W est toujours un mouvement brownien de distribution initiale μ .

Dans toute la suite, on notera $W^x = \{W_t^x, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ le mouvement brownien standard partant de x , muni de notre toute nouvelle filtration continue et complète.

Citons un théorème important, pendant de la loi 0-1 de Kolmogorov :

Théorème 2.16. (*loi 0-1 de Blumenthal*) Si $F \in \mathcal{F}_0$, alors $\mathbb{P}(F) = 0$ ou $\mathbb{P}(F) = 1$.

Et les indispensables :

Théorème 2.17. (*Propriétés de Markov*) Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \geq 0, \mathbb{E}[|f(W_t^x)|] < \infty$, on a, pour tous $0 \leq s \leq t < \infty$:

$$(\text{propriété faible}) \quad \mathbb{E}[f(W_t^x) | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(W_{t-s}^y)] |_{y=W_s^x},$$

$$(\text{propriété forte}) \quad \mathbb{E}[f(W_T^x) | \mathcal{F}_S] = \mathbb{E}[f(W_{T-S}^y)] |_{y=W_S^x},$$

où S et T sont deux temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ tels que $S \leq T$ \mathbb{P} -ps.

On dit que le mouvement brownien est un processus de Markov fort. Les constructions faites précédemment prennent souvent place dans une théorie plus large, celle des processus de Markov, forts ou faibles selon qu'ils vérifient les deux propriétés ou seulement la première.

On termine cette partie avec deux résultats intéressants concernant les trajectoires d'un mouvement brownien.

Proposition 2.18. *Les trajectoires d'un mouvement brownien ne sont presque sûrement nulle part lipschitziennes.*

PREUVE : Soient W un mouvement brownien et $C > 0$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$Y_{k,n} = \max \{|W_{(k+j)/n} - W_{(k+j-1)/n}|, j \in \{0, 1, 2\}\}, \quad 1 \leq k \leq n-2,$$

puis on définit les événements

$$A_n = \{\exists s \in [0, 1] \text{ tel que } \forall t > 0, |t-s| \leq \frac{2}{n}, |W_t - W_s| \leq C|t-s|\};$$

$$B_n = \{\exists 1 \leq k \leq n-2; Y_{k,n} \leq \frac{4C}{N}\}.$$

On a $A_n \subset B_n$ et

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(B_n) \leq n \mathbb{P}\left[|W_{1/n}| \leq \frac{4C}{n}\right]^3 = n \mathbb{P}\left[|W_1| \leq \frac{4C}{\sqrt{n}}\right]^3 \leq \left(\frac{4C}{\sqrt{2\pi n}}\right)^3.$$

Ainsi pour tout $C > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

□

Corollaire 2.19. *Avec probabilité 1, les trajectoires d'un mouvement brownien ne sont dérivables nulle part. Elles ne sont pas localement à variations bornées.*

3 Construction de l'intégrale stochastique

On se donne une fonction $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue, dont chaque fonction coordonnée F^i , $0 \leq i < d$ est croissante. Grâce à la théorie de Lebesgue, on peut construire une mesure "par rapport à F ", vérifiant pour tous $a_1 \leq b_1, \dots, a_d \leq b_d$,

$$\lambda_F([a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]) = \prod_{i=1}^d [F^i(b_i) - F^i(a_i)],$$

puis une intégrale par rapport à F . On note $\int f(t) d\lambda_F(t) = \int f(t) dF(t)$ l'intégrale d'une fonction f "par rapport à F ". Le procédé peut-être étendu aux fonctions dont les coordonnées sont continues à variation bornée, qui se mettent sous la forme $F^i = F_+^i - F_-^i$ avec F_+^i et F_-^i croissantes, en posant $dF = dF_+ - dF_-$.

Le lemme suivant a déjà été implicitement utilisé puisqu'il permet de prouver l'unicité dans le théorème de décomposition de Doob-Meyer. Cependant, il convient de l'explicitier car il est révélateur et sera un outil précieux pour la suite.

Lemme 3.1. *Toute martingale locale, continue et localement à variation bornée est constante.*

PREUVE : Pour $t \geq 0$, on note V_t la variation de M entre 0 et t . En stoppant à $T_n = \inf\{t \geq 0 \text{ tel que } V_t > n \text{ ou } |M_t| > n\}$ puis en faisant $n \rightarrow \infty$, on peut se restreindre au cas d'une martingale M bornée, continue, telle que $\sup_{\omega \in \Omega} V_t(\omega) = C_t < \infty$. Dans ce cas-là, pour $t > 0$, $n \in \mathbb{N}$, avec $t_k = kt/n$, $0 \leq k \leq n$, on a

$$X_n = \sum_{k=1}^n (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2 \leq V_t \max_{1 \leq k \leq n} |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}| \rightarrow 0 \quad \mathbb{P}\text{-ps quand } n \rightarrow \infty.$$

Le théorème de convergence dominée amène alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = 0$.

Or, $\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[M_t^2] - \mathbb{E}[M_0^2] = \mathbb{E}[(M_t - M_0)^2]$, ce qui implique $M_t = M_0$ \mathbb{P} -ps.

□

Ainsi, toutes les martingales non constantes, et en particulier le processus de Wiener, ne sont presque sûrement pas à variation bornée, et il devient nécessaire de développer de nouveaux outils pour intégrer par rapport à des martingales. La technique utilisée dans la preuve précédente, qui consiste à stopper à certains endroits, s'appelle localisation. Dans la suite, on se ramènera souvent à des cas plus simples "par localisation".

La construction de l'intégrale stochastique pour le mouvement brownien est due à Itô, dans les années 40. Le cas général fut étudié par Kunita et Watanabe dans les années 60. Nous allons expliquer ici dans les grandes lignes comment intégrer par rapport à une martingale continue, de carré intégrable, puis faire une extension aux martingales locales continues.

3.1 Processus simples

On se fixe ainsi $M \in \mathcal{M}_c^2$, munie de la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. L'intégrale d'un processus X par rapport à M s'écrira $I_t^M(X) = \int_0^t X_s dM_s$. C'est elle même un processus. On omet le M s'il n'y a pas d'ambiguïté.

La classe la plus vaste de processus à intégrer est l'ensemble des processus progressivement mesurables par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$:

Définition 3.2. Un processus X est dit progressivement mesurable (par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$) si pour tout $t \geq 0$, l'application

$$\begin{aligned} ([0, t] \times \Omega), (\mathcal{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) &\longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ (s, \omega) &\longmapsto X_s(\omega) \end{aligned}$$

est mesurable. On note $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des processus progressivement mesurables, ou \mathcal{P} si la filtration est claire.

Définition 3.3. Un processus X est dit simple (par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$) s'il s'écrit, pour tous $0 \leq t < \infty$, $\omega \in \Omega$:

$$X_t(\omega) = \xi_0(\omega) \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{n \geq 0} \xi_n(\omega) \mathbf{1}_{]t_n, t_{n+1}]}.$$

où $(t_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante et $(\xi_n)_{n \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires telle que $\forall n \geq 0$, ξ_n est \mathcal{F}_{t_n} -mesurable et telle qu'il existe $0 < C < \infty$ vérifiant $\forall \omega \in \Omega$, $\sup_{n \geq 0} \xi_n(\omega) \leq C$. On note $\Gamma_0(M) \subset \mathcal{P}(M)$ l'ensemble des processus simples, ou Γ_0 si la filtration est claire.

Pour un processus simple $X = (t_n, \xi_n)_{n \geq 0}$, il est naturel de définir, pour $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} I_t(X) &= \sum_{i \geq 0} \xi_i(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) \\ &= \sum_{i=0}^{N_t-1} \xi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_{N_t}(M_t - M_{t_{N_t}}), \end{aligned}$$

où N_t est l'unique entier tel que $t_{N_t} \leq t < t_{N_t+1}$.

Proposition 3.4. Soient $M, N \in \mathcal{M}_c^2$, munies de la même filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et $X, Y \in \Gamma_0$. Les intégrales ont les propriétés suivantes :

- (i) $I_0(X) = 0$ \mathbb{P} -ps ;
- (ii) I est une application \mathbb{R} -linéaire ;
- (iii) Le processus $(I_t(X))_{t \geq 0}$ est une martingale relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$;
- (iv) Pour $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}[(I_t(X) - I_s(X))^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\int_s^t X_u^2 d\langle M \rangle_u | \mathcal{F}_s]$ \mathbb{P} -ps ;
- (v) $\mathbb{E}[I_t^M(X) I_t^N(Y)] = \mathbb{E}[\int_0^t X_s Y_s d\langle M, N \rangle_s]$;

PREUVE : Les points (i) et (ii) sont clairs.

(iii) Comme $\mathbb{E}[|M_s|] < \infty$ pour tout $s \geq 0$, on a pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[|I_t(X)|] \leq C \left(\sum_{i=0}^{N_t-1} \mathbb{E}[|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|] + \mathbb{E}[|M_t - M_{t_{N_t}}|] \right) < \infty.$$

De plus, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi_i(M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t}) | \mathcal{F}_s] &= \begin{cases} \xi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) & \text{si } t_{i+1} \leq s \\ \xi_i(M_s - M_{t_i}) & \text{si } t_i \leq s \leq t_{i+1} \\ 0 & \text{si } s \leq t_i \end{cases} \\ &= \xi_i(M_{t_{i+1} \wedge s} - M_{t_i \wedge s}) \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{E}[I_t(X) | \mathcal{F}_s] = I_s(X)$, faisant de $\{I_t(X), \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ une martingale.

(iv) Soient $0 \leq s \leq t$. On a

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(I_t(X) - I_s(X))^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(\xi_{N_s-1}(M_{t_{N_s}} - M_s) + \sum_{i=N_s}^{N_t-1} \xi_i(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) + \xi_{N_t}(M_t - M_{t_{N_t}})\right)^2 | \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\xi_{N_s-1}^2(M_{t_{N_s}} - M_s)^2 + \sum_{i=N_s}^{N_t-1} \xi_i^2(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2 + \xi_{N_t}^2(M_t - M_{t_{N_t}})^2 | \mathcal{F}_s\right], \end{aligned}$$

tous les doubles produits étant nuls. De plus, en utilisant le fait que

$$\mathbb{E}[X_t Y_t - X_s Y_s | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\langle X, Y \rangle_t - \langle X, Y \rangle_s | \mathcal{F}_s], \quad (3.1)$$

on obtient

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[(I_t(X) - I_s(X))^2 | \mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}\left[\xi_{N_s-1}^2(\langle M \rangle_{t_{N_s}} - \langle M \rangle_s) + \sum_{i=N_s}^{N_t-1} \xi_i^2(\langle M \rangle_{t_{i+1}} - \langle M \rangle_{t_i}) + \xi_{N_t}^2(\langle M \rangle_t - \langle M \rangle_{t_{N_t}}) | \mathcal{F}_s\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_s^t X_s^2 d\langle M \rangle_s | \mathcal{F}_s\right]. \end{aligned}$$

(v) On peut supposer que $X = (t_n, \xi_n)_{n \geq 0}$ et $Y = (t_n, \zeta_n)_{n \geq 0}$ pour la même suite $(t_n)_{n \geq 0}$. Dans ce cas là, pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[I_t^M(X) I_t^N(Y)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i \geq 0} \xi_i \zeta_i (M_{t_{i+1} \wedge t} - M_{t_i \wedge t})(N_{t_{i+1} \wedge t} - N_{t_i \wedge t})\right],$$

les doubles produits étant nuls (la somme est finie). D'où, par (3.1),

$$\mathbb{E}[I_t(X) I_t(Y)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i \geq 0} \xi_i \zeta_i (\langle M, N \rangle_{t_{i+1} \wedge t} - \langle M, N \rangle_{t_i \wedge t})\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_s Y_s d\langle M, N \rangle_s\right];$$

□

En particulier, on a prouvé que $I(X) \in \mathcal{M}_c^2$, avec pour $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}[(I_t(X))^2] = \|I(X)\|_t^2 = \mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s\right],$$

$$\langle I(X) \rangle_t = \int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s.$$

3.2 Approximations et définition de l'intégrale

Pour $M = (M_t, \mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_c^2$, les dernières égalités poussent à définir l'intégrale de processus X , adaptés à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, et vérifiant pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{E}[\int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s] < \infty$.

On définit ainsi

$$\Gamma(M) = \left\{ X \in \mathcal{P} \text{ tels que } \forall t \geq 0, \mathbb{E}\left[\int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s\right] < \infty \right\}.$$

Le résultat essentiel est le suivant. La démonstration est longue et ne sera pas donnée ici.

Proposition 3.5. Soit $M \in \mathcal{M}_c^2$. Pour tout processus $X \in \Gamma(M)$, il existe une suite de processus simples $(X^n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\sup_{t > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int_0^t |X_s^n - X_s|^2 d\langle M \rangle_s \right] = 0. \quad (3.2)$$

Définition 3.6. Soit $M \in \mathcal{M}_c^2$. L'intégrale de $X \in \Gamma(M)$ par rapport à M est l'unique martingale $I(X) \in \mathcal{M}_c^2$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|I(X^n) - I(X)\| = 0$$

pour toute suite $(X^n)_{n \geq 0} \subset \Gamma_0(M)$ vérifiant (3.2). On note $I_t(X) = \int_0^t X_s dM_s$.

PREUVE : Cette définition requiert en effet quelques explications. Soit $X \in \Gamma(M)$. Si $(X^n)_{n \geq 0} \subset \Gamma_0(M)$ est une suite vérifiant (3.2), on a pour $n, m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{t \geq 0} \|I(X^n) - I(X^m)\|_t^2 = \sup_{t \geq 0} \|I(X^n - X^m)\|_t^2 = \sup_{t \geq 0} \mathbb{E} \left[\int_0^t |X_s^n - X_s^m|^2 d\langle M \rangle_s \right],$$

qui tend vers 0 quand $n, m \rightarrow \infty$. $(I(X^n))_{n \geq 0}$ est donc de Cauchy dans $(\mathcal{M}_c^2, \|\cdot\|)$ donc converge vers un processus $I(X) \in \mathcal{M}_c^2$, d'après 2.9.

Cette limite ne dépend pas de la suite $(X^n)_{n \geq 0}$ choisie. En effet, si $(Y^n)_{n \geq 0}$ en est une autre alors on peut en définir une troisième par : $Z^{2n} = X^n$, $Z^{2n+1} = Y^n$ pour $n \in \mathbb{N}$. $I(Z^n)$ converge d'après ce qui précède, et les sous suites $(I(X^n))_{n \geq 0}$ et $(I(Y^n))_{n \geq 0}$ convergent toutes deux vers $\lim_{n \rightarrow \infty} I(Z^n)$.

□

Proposition 3.7. Les propriétés (i) à (v) de la proposition 3.4 sont vérifiées pour tout $M \in \mathcal{M}_c^2$.

Les points (i) à (iv) passent facilement à la limite. La preuve du point (v) est plus délicate. Elle requiert en particulier la proposition suivante, sorte d'inégalité de Cauchy-Schwartz stochastique, en elle-même intéressante :

Proposition 3.8. (Inégalité de Kunita et Watanabe) Soient $M, N \in \mathcal{M}_c^2$ et $X \in \Gamma(M)$, $Y \in \Gamma(N)$. Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\int_0^t |X_s Y_s| d\xi_s \leq \left(\int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s \right)^{1/2} \left(\int_0^t Y_s^2 d\langle N \rangle_s \right)^{1/2}.$$

où ξ représente la variation totale du processus $\langle M, N \rangle$,

Tout cela amène à une caractérisation de l'intégrale :

Proposition 3.9. Soient $M \in \mathcal{M}_c^2$ et $X \in \Gamma(M)$. L'intégrale stochastique $I^M(X)$ est l'unique martingale $\Phi \in \mathcal{M}_c^2$ vérifiant pour tout $t \geq 0$, $N \in \mathcal{M}_c^2$ l'égalité

$$\langle \Phi, N \rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N \rangle_u \quad \mathbb{P}\text{-ps.}$$

Corollaire 3.10. Soient $M \in \mathcal{M}_c^2$, $X \in \Gamma(M)$ et $Y \in \Gamma(I^M(X))$. Alors $XY \in \Gamma(M)$ et $I^{I^M(X)}(Y) = I^M(XY)$. Autrement dit, $d(I^M(X)) = X dM$.

3.3 Extension aux martingales locales continues

Soit $M \in \mathcal{M}_c^{loc}$. On définit

$$\Pi(M) = \left\{ X \in \mathcal{P}(M) \text{ tels que } \forall t \geq 0, \mathbb{P}\left[\int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s < \infty\right] = 1 \right\}.$$

Soit $(S_n)_{n \geq 0}$ une suite de temps d'arrêt tendant vers l'infini, faisant de $(M_{t \wedge S_n})_{t \geq 0}$ une martingale pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $X \in \Pi(M)$, on pose

$$R_n(X) = n \wedge \inf \left\{ t \geq 0; \int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s \geq n \right\}; \quad n \geq 0$$

puis

$$T_n(X) = R_n(X) \wedge S_n.$$

Par définition de $\Pi(M)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(X) = +\infty$. On définit, pour tous $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$,

$$M_t^n = M_{t \wedge T_n}, \quad X_t^n = X_t \mathbf{1}_{\{t \leq T_n\}}.$$

Ainsi, $M^n \in \mathcal{M}_c^2$ et $X^n \in \Gamma(M)$. De plus, pour $1 \leq n \leq m$ et $t \leq T_n$,

$$I_t^{M^n}(X^n) = I_t^{M^m}(X^m),$$

ce qui amène la définition suivante :

Définition 3.11. Soit $M \in \mathcal{M}_c^{loc}$. L'intégrale de $X \in \Pi(M)$ par rapport à M est le processus $I^M(X) \in \mathcal{M}_c^{loc}$ donné par :

$$I_t^M(X) = I_t^{M^n}(X^n); \quad 0 \leq t \leq T_n.$$

On note $I_t^M(X) = \int_0^t X_s dM_s$.

Les résultats suivants se démontrent par localisation :

Proposition 3.12. Soient $M, N \in \mathcal{M}_c^{loc}$, munies de la même filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et $X, Y \in \Pi$. Les intégrales ont les propriétés suivantes :

- (i) $I_0(X) = 0$ \mathbb{P} -ps;
- (ii) I est une application \mathbb{R} -linéaire;
- (iii) Le processus $(I_t(X))_{t \geq 0}$ est une martingale locale relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$;
- (iv) $\langle I(X) \rangle_t = \int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s$;
- (v) $\mathbb{E}[I_t^M(X) I_t^N(Y)] = \mathbb{E}[\int_0^t X_s Y_s d\langle M, N \rangle_s]$;

On a l'équivalent de la proposition 3.9 :

Proposition 3.13. Soient $M \in \mathcal{M}_c^{loc}$ et $X \in \Pi(M)$. L'intégrale stochastique $I^M(X)$ est l'unique martingale locale $\Phi \in \mathcal{M}_c^{loc}$ vérifiant pour tout $t \geq 0$, $N \in \mathcal{M}_c^2$ (ou de façon équivalente pour tout $N \in \mathcal{M}_c^{loc}$) l'égalité

$$\langle \Phi, N \rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N \rangle_u \quad \mathbb{P}\text{-ps.}$$

3.4 La formule d'Itô

La formule d'Itô est le pendant stochastique du théorème fondamental de l'analyse, qui traduit les rôles inverses joués par l'intégration et la différentiation. Ayant affaire à des trajectoires qui ne sont pas à variation bornée, le second terme du développement de Taylor ne disparaît pas (cf. preuve) ce qui rajoute un terme dans l'égalité classique.

Théorème 3.14. (*Formule d'Itô*) Soit $X = M + A$ une semi-martingale continue. Alors, pour toute fonction $f \in C^2(\mathbb{R})$, on a, pour tout $0 \leq t < \infty$,

$$f(X_t) - f(X_0) = \int_0^t f'(X_s) dM_s + \int_0^t f'(X_s) dA_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_s$$

PREUVE : On note \check{A} le processus variation totale de A . Par localisation, on se ramène au cas où $M, \check{A}, \langle M \rangle$ sont bornés sur $\Omega \times [0, \infty[$ par une constante $K \geq 0$. $|X|$ est alors borné par $2K$ et on peut donc supposer que f est à support compact. Ainsi, f, f', f'' sont bornées.

Fixons alors $t > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}$, choisissons une partition $\Pi = t_0, \dots, t_n$ de $[0, t]$, ie $0 = t_0 < \dots < t_n = t$. Par un développement de Taylor, il existe pour tout $0 \leq k \leq n-1$ $\xi_k \in [X_{t_k}, X_{t_{k+1}}]$ tel que

$$f(X_{t_{k+1}}) - f(X_{t_k}) = f'(X_{t_k})(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) + \frac{1}{2} f''(\xi_k)(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{k=0}^{n-1} f'(X_{t_k})(X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) + f''(\xi_k)(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2 \\ &= J_1(\Pi) + J_2(\Pi) + \frac{1}{2} J_3(\Pi), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} J_1(\Pi) &= \sum_{k=0}^{n-1} f'(X_{t_k})(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}); \\ J_2(\Pi) &= \sum_{k=0}^{n-1} f'(X_{t_k})(A_{t_{k+1}} - A_{t_k}); \\ J_3(\Pi) &= \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k)(X_{t_{k+1}} - X_{t_k})^2. \end{aligned}$$

Lorsque $\|\Pi\| = \sup_{0 \leq k \leq n-1} |t_{k+1} - t_k|$ décroît vers zéro, le terme $J_1(\Pi)$ tend par définition vers $\int_0^t f'(X_s) dA_s$.

De plus, le processus simple $Y^\Pi = f'(X_0)\mathbf{1}_{\{0\}} + \sum_{k=0}^{n-1} f'(X_{t_k})\mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}$ approche $Y = f'(X) \in \Gamma(M)$ au sens où $\lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \mathbb{E}[\int_0^t |Y^\Pi - Y_s|^2 d\langle M \rangle_s] = 0$, par convergence dominée. Ainsi $\int_0^t Y_s dM_s = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \int_0^t Y^\Pi dM_s$.

Le troisième terme se décompose en

$$\begin{aligned} J_3(\Pi) &= \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k)(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})^2 \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k)(M_{t_{k+1}} - M_{t_k})(A_{t_{k+1}} - A_{t_k}) + \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k)(A_{t_{k+1}} - A_{t_k})^2. \end{aligned}$$

On majore la deuxième ligne par $2K\|f''\|_\infty (\max_{0 \leq k \leq n-1} |M_{t_{k+1}} - M_{t_k}| + |A_{t_{k+1}} - A_{t_k}|)$, qui tend vers 0 presque sûrement quand $\|\Pi\| \rightarrow 0$, par continuité de M et A .

Reste à montrer que le premier terme a pour limite

$$\int_0^t f''(X_s) d\langle M \rangle_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f''(X_{t_k}) (\langle M \rangle_{t_{k+1}} - \langle M \rangle_{t_k}).$$

La preuve, plus complexe, est liée aux propriétés de la variation quadratique et notamment à la propriété justifiant son appellation, le fait que :

$$\langle M \rangle_t = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} |M_{t_{k+1}} - M_{t_k}|^2 \text{ en probabilité.}$$

Nous ne détaillerons pas la fin de la preuve. □

On peut étendre ce résultat en dimension supérieure d . De plus, remarquons que, pour $h \in C^1(\mathbb{R})$, le processus $Y_t = (X_t, h(t)) = (M_t, 0) + (A_t, h(t))$ est une semi-martingale et la formule précédente peut s'appliquer. En particulier, pour $h = Id$, on obtient de façon générale, pour tous $f \in C^2(\mathbb{R})$, $0 \leq t < \infty$,

$$\begin{aligned} f(X_t, t) - f(X_0, 0) &= \int_0^t \partial_t f(X_s, s) ds \\ &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i f(X_s, s) dM_s^{(i)} + \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_i f(X_s, s) dA_s^{(i)} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \partial_{ij}^2 f(X_s, s) d\langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle_s. \end{aligned}$$

3.5 Applications de la formule d'Itô

On commence par un lemme de calcul qui servira dans la dernière section.

Lemme 3.15. (formule d'intégration par parties) Soient $X = X_0 + M + A$ et $Y = Y_0 + N + B$ deux semi-martingales continues. Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \langle M, N \rangle_t.$$

PREUVE : On définit l'application $f(x, y) = xy$ pour $x, y \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \frac{\partial f}{\partial y} = x, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1, \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 0.$$

La formule d'Itô donne pour $t \geq 0$:

$$f(X_t, Y_t) - f(X_0, Y_0) = X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t X_s dY_s + \int_0^t Y_s dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t 2 d\langle M, N \rangle_s.$$

□

La formule d'Itô permet de prouver de façon astucieuse le théorème de Paul Lévy, concernant une caractérisation du mouvement brownien :

Théorème 3.16. (P.Lévy) Soit $\{X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d), \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ un processus continu adapté dans \mathbb{R}^d , vérifiant pour tout $1 \leq i, j \leq d$:

- (i) $M_t^i = X_t^i - X_0^i, 0 \leq t < \infty$ est une martingale locale relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$;
- (ii) $\langle M^i M^j \rangle_t = \delta_{ij} t, 0 \leq t < \infty$.

Alors $\{X_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ est un mouvement brownien d -dimensionnel "partant de X_0 ".

PREUVE : Il nous suffit de montrer pour tous $0 \leq s < t$ l'égalité :

$$\mathbb{E}[e^{i\langle u, X_t - X_s \rangle} | \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{t-s}{2}|u|^2}, \mathbb{P}\text{-ps}, u \in \mathbb{R}^d.$$

Soient donc $0 \leq s < t$, $u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$ et $f : x \mapsto e^{i\langle u, x \rangle}$. On a pour $x \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = i u_i f(x), \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) = -u_i u_j f(x).$$

La formule d'Itô appliquée aux parties réelle et imaginaire de f amène :

$$f(X_t) - f(X_s) = e^{i\langle u, X_t \rangle} - e^{i\langle u, X_s \rangle} = i \sum_{j=1}^d u_j \int_s^t f(X_r) dM_r^j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d u_j^2 \int_s^t f(X_r) dr \quad (3.3)$$

Comme $\langle M^i \rangle_t = t$, on a $M \in \mathcal{M}_c^2$; les parties réelle et imaginaire de la première intégrale sont donc des martingales et on a $\mathbb{E}[\int_s^t e^{i\langle u, X_r \rangle} dM_r^i | \mathcal{F}_s] = 0$.

Soit alors $A \in \mathcal{F}_s$. En multipliant les deux membres de (3.3) par $e^{-i\langle u, X_s \rangle} \mathbf{1}_A$ et en intégrant, on obtient

$$\mathbb{E}[e^{i\langle u, X_t - X_s \rangle} \mathbf{1}_A] - \mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} |u|^2 \int_s^t \mathbb{E}[e^{i\langle u, X_r - X_s \rangle} \mathbf{1}_A] dr.$$

La fonction $t \mapsto \mathbb{E}[e^{i\langle u, X_t - X_s \rangle} \mathbf{1}_A]$ est donc l'unique solution de l'équation intégrale ci-dessus :

$$\mathbb{E}[e^{i\langle u, X_t - X_s \rangle} \mathbf{1}_A] = \mathbb{P}(A) e^{\frac{t-s}{2}|u|^2}, A \in \mathcal{F}_s,$$

impliquant finalement

$$\mathbb{E}[e^{i\langle u, X_t - X_s \rangle} | \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{t-s}{2}|u|^2}, \mathbb{P}\text{-ps}.$$

◆

4 Application à l'équation de la chaleur

La loi phénoménologique de Fourier conduit à l'équation de diffusion thermique ou équation de la chaleur :

$$(\Delta - \frac{1}{k} \partial_t)T(t, x) = 0$$

où $T(t, x)$ représente la température en x à l'instant t et k la diffusivité thermique du matériau considéré. En posant $t' = \frac{t}{2k}$, on se ramène à l'équation $(\frac{1}{2}\Delta - \partial_t)T = 0$.

4.1 Problème de Cauchy

On considère le problème suivant pour $0 < T \leq \infty$:

$$(C_1^T) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in C^{1,2}(]0, T[, \mathbb{R}^d) \cap C([0, T[, \mathbb{R}^d) \text{ vérifiant} \\ (\frac{1}{2}\Delta - \partial_t)u(t, x) = 0 \quad \text{pour tous } (t, x) \in]0, T[\times \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d \end{array} \right.$$

où f est une application continue donnée de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . On pose $(C_1^\infty) = (C_1)$.

4.1.1 Le cas borné

On suppose ici que f est bornée sur \mathbb{R}^d et on s'intéresse aux solutions de C_1 bornées sur \mathbb{R}^d , à tous instant t .

Etape 1 : Soit u une telle solution et W un mouvement brownien. Fixons $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$. Comme $u \in C^{1,2}(]0, \infty[, \mathbb{R}^d)$, on peut appliquer la formule d'Itô à $s \mapsto u(t-s, W_s^x)$ pour $0 \leq s < t$:

$$\begin{aligned} u(t-s, W_s^x) - u(t, W_0^x) &= \\ \sum_{i=1}^d \int_0^s \partial_i u(t-r, W_r^x) dW_r^{x,(i)} + \int_0^s -\partial_t u(t-r, W_r^x) dr + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^s \partial_{ij}^2 u(t-r, W_r^x) d\langle W^{x,(i)}, W^{x,(j)} \rangle_s &= \\ \sum_{i=1}^d \int_0^s \partial_i u(t-r, W_r^x) dW_r^{x,(i)} + \int_0^s (-\partial_t + \frac{1}{2}\Delta)u(t-r, W_r^x) dr. \end{aligned}$$

puisque $d\langle W^{x,(i)}, W^{x,(j)} \rangle_s = s\delta_{ij}$. Le deuxième terme est nul par hypothèse et le premier terme est une martingale pour $0 \leq s < t$ par définition de l'intégrale, car u est bornée. $u(t, W_0^x)$ étant constant, on en déduit que le processus $M_s^x = u(t-s, W_s^x)$ est une martingale pour $0 \leq s < t$, continue puisque W^x et u le sont. $(M_s^x)_{0 \leq s < t}$ converge donc \mathbb{P} -presque sûrement vers M_t^x quand s tend vers t . Par continuité de u sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}^d$, on obtient $M_t^x = u(0, W_t^x) = f(W_t^x)$. Or, pour tout $0 \leq s \leq t$, on a $M_s^x = \mathbb{E}[M_t^x | \mathcal{F}_s]$ \mathbb{P} -ps. En particulier, pour $s = 0$, on obtient :

$$M_0^x = u(t, W_0^x) = u(t, x) = \mathbb{E}[M_t^x | \mathcal{F}_0]$$

donc finalement

$$u(t, x) = \mathbb{E}[f(W_t^x)]$$

Etape 2 : Réciproquement, montrons que la fonction $v : (t, x) \mapsto \mathbb{E}[f(W_t^x)]$ est une solution du problème si f est bornée.

Fixons $t > 0, x \in \mathbb{R}^d$. D'après la propriété de Markov, il vient pour tout $0 \leq s < t$,

$$v(t-s, W_s^x) = \mathbb{E}[f(W_{t-s}^y)]|_{y=W_s^x} = \mathbb{E}[f(W_t^x)|\mathcal{F}_s].$$

Le terme de droite est une martingale relativement à $(\mathcal{F}_s)_{0 \leq s < t}$ dès que $\mathbb{E}[|f(W_t^x)|] < \infty$, donc en particulier pour f bornée. Appliquant la formule d'Itô, on obtient

$$\begin{aligned} v(t-s, W_s^x) - v(t, W_0^x) = \\ \int_0^s (-\partial_t + \frac{1}{2}\Delta)v(t-r, W_r^x)dr + \text{une martingale.} \end{aligned}$$

On en déduit que l'intégrale ci-dessus est une martingale, qui est continue et à variation bornée donc elle est nulle par le lemme 3.1. Le lemme suivant permet de conclure que v est alors solution de (C_1) :

Lemme 4.1. Soient $t > 0$ et $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\int_0^s f(W_r)dr = 0 \quad \mathbb{P}\text{-ps, } 0 \leq s < t.$$

Alors $f = 0$.

PREUVE : Supposons qu'il existe un point $x \in \mathbb{R}^d$ où f ne soit pas nulle, disons $f(x) > 0$. Par continuité, f est alors strictement positive sur un voisinage ouvert V_x de x dans \mathbb{R}^d . De plus, pour tout $s > 0$,

$$\mathbb{P}[W_s \in V_x] = \int_{V_x} \frac{e^{-|y|^2/2s}}{(2\pi s)^{d/2}} dy > 0.$$

On pose pour $0 < s < t$, $\Omega_s = [W_s \in V_x]$ sur lequel on définit $T = \sup(r < s, W_r \notin V_x)$. On a alors tout $\omega \in \Omega_s$,

$$\int_0^s f(W_r(\omega))dr = \int_0^{T(\omega)} f(W_r(\omega))dr + \int_{T(\omega)}^s f(W_r(\omega))dr.$$

Or, presque partout sur Ω_s (donc sur un ensemble de probabilité non nulle), la première intégrale est nulle (par hypothèse) et la deuxième est strictement positive. On aboutit donc à une contradiction.

♣

On a finalement prouvé le résultat suivant (et un peu plus même) :

Théorème 4.2. Si f est bornée, alors le problème (C_1) admet une unique solution bornée u , donnée pour tous $(t, x) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}^d$ par

$$u(t, x) = \mathbb{E}[f(W_t^x)].$$

4.1.2 Approche plus fine

Les démarches précédentes restent valables si on fixe certaines conditions sur les solutions et sur f . Reprenons-les et voyons où elles nous mènent.

Etape 1 : Soient u une solution de (C_1) et $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ fixés. Appliquant la formule d'Itô à $s \mapsto u(t-s, W_s^x)$ pour $0 \leq s < t$, on obtient :

$$u(t-s, W_s^x) - u(t, W_0^x) = \sum_{i=1}^d \int_0^s \partial_i u(t-r, W_r^x) dW_r^{x,(i)}.$$

Sans hypothèse sur u , on sait seulement, par définition, que l'intégrale ci-dessus et donc le processus $M_s = u(t-s, W_s^x)$ sont des martingales locales pour $0 \leq s < t$. Toutefois, si $(M_s)_{0 \leq s < t}$ est uniformément intégrable alors ce sera une martingale sur $0 \leq s \leq t$ par le lemme 2.12.

Cherchons donc quand $\sup_{0 \leq s < t} \mathbb{E}[|u(t-s, W_s^x)|] < \infty$. Fixons $0 < r < t$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|u(r, W_s^x)|] &= \frac{1}{(2\pi s)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |u(r, y)| e^{-|y-x|^2/2s} ds \\ &= \frac{1}{(\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} |u(r, y\sqrt{2s} + x)| e^{-|y|^2} ds. \end{aligned}$$

Cela nous amène à considérer les fonctions $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient pour tous $x \in \mathbb{R}^d$, $0 \leq s < t$

$$I_s(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |v(y\sqrt{2s} + x)| e^{-|y|^2} ds < \infty.$$

Une condition naturelle est de choisir v telle que $\forall y \in \mathbb{R}^d$, $|v(y)| < Ce^{\alpha|y|^2}$, où C et α sont des réels positifs. Ainsi, après quelques calculs :

$$I_s(x) \leq \frac{C}{(\pi(1-2\alpha s))^{d/2}} \exp\left(\frac{\alpha}{1-2\alpha s}|x|^2\right),$$

ce qui sera valable si $\alpha < \frac{1}{2s}$.

Définition 4.3. soit $s > 0$. On dira qu'une fonction $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est dans la classe \mathcal{K}_s s'il existe $C > 0$, $\alpha \in]0, \frac{1}{2s}[$ tels que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $|v(y)| < Ce^{\alpha|y|^2}$. On pose

$$\kappa = K_\infty = \bigcap_{s \geq 0} \mathcal{K}_s \text{ et } \mathcal{K} = \bigcup_{s \geq 0} \mathcal{K}_s.$$

Ainsi, si on suppose que notre fonction $u(t-s, \cdot)$ est dans la classe \mathcal{K}_t pour tout $0 \leq s \leq t$, alors le processus $(M_s)_{0 \leq s < t}$ est une martingale et vérifie $M_s = \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]$.

Par continuité de u en 0, on en conclut que

$$M_t = f(W_t^x) \text{ et } u(t, x) = M_0 = \mathbb{E}[f(W_t^x)] \text{ P-ps.}$$

Etape 2 : Soit $v : (t, x) \mapsto \mathbb{E}[f(W_t^x)]$. Supposons que f soit dans la classe \mathcal{K}_T pour un certain $T > 0$. Alors la fonction est définie sur $[0, T[$, elle y est même continue grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, et de classe C^∞ sur $]0, T[$, par les théorèmes de dérivations sous l'intégrale. De plus, si α et C sont des constantes positives telles que $\forall y \in \mathbb{R}^d$, $|v(y)| < Ce^{\alpha|y|^2}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, 0 \leq t \leq T, \quad |v(t, x)| \leq \frac{C}{(\pi(1-2\alpha T))^{d/2}} \exp\left(\frac{\alpha}{1-2\alpha T}|x|^2\right).$$

Ainsi, la fonction $v(t, \cdot)$ reste dans la classe $\mathcal{K}_{\frac{1}{\alpha} - 2T} \subset \mathcal{K}$ pour tout $t \leq T$.

De plus, la fonction v ainsi choisie est solution du problème (C_1) . En effet, comme $\mathbb{E}[|f(W_t^x)|] < \infty$ pour $t < T$, on peut répéter la démarche du cas borné. On applique la propriété de Markov, puis on obtient par la formule d'Itô que $\int_0^s (-\partial_t + \frac{1}{2}\Delta)v(t-r, W_r^x)dr$ est une martingale locale pour tout $0 \leq s < t$, continue et à variation bornée. On conclut par les lemmes 3.1 et 4.1.

Le théorème suivant résume les résultats obtenus :

Théorème 4.4. *Soit $T > 0$.*

1. *S'il existe une solution u du problème (C_1^T) avec $u(t, \cdot) \in \mathcal{K}_T$ pour $0 \leq t < T$, alors elle est unique et donnée par*

$$u(t, x) = \mathbb{E}[f(W_t^x)] \quad \text{pour tous } 0 \leq t < T, x \in \mathbb{R}^d.$$

2. *Si $f \in K_T$, alors $v : (t, x) \mapsto \mathbb{E}[f(W_t^x)]$ est une solution du problème (C_1^T) , qui reste dans la classe $\mathcal{K}_{\frac{1}{\alpha}-2T}$ pour $0 \leq t < T$.*

On en déduit les deux corollaires :

Corollaire 4.5. *Si $f \in \mathcal{K}_T$ pour un certain $T > 0$ alors le problème (C_1^T) admet une solution u , unique dans la classe \mathcal{K} , donnée par*

$$u(t, x) = \mathbb{E}[f(W_t^x)] \quad \text{pour tous } 0 \leq t < T, x \in \mathbb{R}^d.$$

Corollaire 4.6. *Si f est dans la classe κ alors le problème (C_1) admet une solution u , unique dans la classe \mathcal{K} , donnée par*

$$u(t, x) = \mathbb{E}[f(W_t^x)] \quad \text{pour tous } 0 \leq t < T, x \in \mathbb{R}^d.$$

De plus, pour tout $t \geq 0$, $u(t, \cdot)$ est dans la classe κ .

4.1.3 Un contre-exemple

Le problème (C_1) n'admet pas de solution unique dans le cas général. En dimension 1 par exemple,

Proposition 4.7. *Il existe une solution non identiquement nulle au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} (\frac{1}{2}\Delta - \partial_t)u = 0 & \text{sur }]0, \infty[\times \mathbb{R} \\ u(0, x) = 0 & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

PREUVE : On considère la fonction $\varphi : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \exp(-\frac{1}{x^2})$ qu'on prolonge par continuité en 0 par la valeur 0. On pose alors

$$u(t, x) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!} & , t > 0 \\ 0 & , t = 0 \end{cases}.$$

Des problèmes de convergence de séries et de séries dérivées permettent de montrer que u est une solution de (C_1') .

4.1.4 Problèmes voisins

Voici quelques problèmes proches qu'on peut traiter de manière tout à fait similaire.

$$(C_2) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in C^{1,2}(]0, \infty[, \mathbb{R}^d) \cap C([0, \infty[, \mathbb{R}^d) \text{ vérifiant} \\ (\frac{1}{2}\Delta - \partial_t)u(t, x) = g(x) \text{ pour tous } (t, x) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d \end{array} \right.$$

où f et g sont des applications continues données de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . On obtient par exemple :

Théorème 4.8. *Si f et g sont bornées alors le problème (C_2) admet une unique solution bornée, donnée par :*

$$u(t, x) = \mathbb{E}[f(W_t^x) + \int_0^t g(W_r^x) dr].$$

Bien sûr, ce résultat peut être affiné par des techniques très proches des précédentes. On peut encore modifier le problème (C_1) en ajoutant un terme de "refroidissement"...

$$(C_3) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in C^{1,2}(]0, \infty[, \mathbb{R}^d) \cap C([0, \infty[, \mathbb{R}^d) \text{ vérifiant} \\ (\frac{1}{2}\Delta - \partial_t + c(x))u(t, x) = 0 \text{ pour tous } (t, x) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d \end{array} \right.$$

où f et c sont des applications continues données de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} .

Proposition 4.9. *(formule de Feynman-Kac) Si le problème (C_3) admet une solution u bornée alors elle est unique et donnée pour tous $(t, x) \in [0, \infty[\times \mathbb{R}^d$ par*

$$u(t, x) = \mathbb{E}\left[f(W_t^x) \exp\left(\int_0^t c(W_r^x) dr\right)\right]$$

PREUVE : On fixe $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d$, on suppose que u est une solution bornée de (P_1'') et on applique la formule d'Itô à $s \mapsto u(t-s, W_s^x) \exp\left(\int_0^s c(W_r^x) dr\right)$ pour $0 \leq s < t$. Les mêmes remarques conduisent alors au résultat. ♠

Le résultat final est :

Théorème 4.10. *Si les fonctions f et $\ln|c|$ sont dans la classe κ alors le problème (C_3) admet une solution u , unique dans la classe \mathcal{K} , donnée par*

$$u(t, x) = \mathbb{E}\left[f(W_t^x) \exp\left(\int_0^t c(W_r^x) dr\right)\right] \text{ pour tous } 0 \leq t < T, x \in \mathbb{R}^d.$$

De plus, pour tout $t \geq 0$, $u(t, \cdot)$ est dans la classe κ .

4.2 Problème de Dirichlet

On se donne un ouvert $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$. Sa frontière est noté $\partial\mathcal{D}$, son adhérence $\overline{\mathcal{D}}$. On considère l'équation de la chaleur avec des conditions aux limites différentes :

$$(D_1) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in C^{1,2}(]0, \infty[, \mathcal{D}) \cap C([0, \infty[, \overline{\mathcal{D}}) \text{ vérifiant} \\ (\frac{1}{2}\Delta - \partial_t)u(t, x) = 0 \text{ pour tous } (t, x) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}^d \\ u(0, x) = f(x) \text{ pour tout } x \in \overline{\mathcal{D}} \\ u(t, x) = h(t, x) \text{ pour tous } (t, x) \in [0, \infty[\times \partial\mathcal{D} \end{array} \right.$$

où f est une fonction continue de $\overline{\mathcal{D}}$ dans \mathbb{R} , h une fonction continue de $\partial\mathcal{D}$ dans \mathbb{R} .

La dernière condition traduit le fait que l'extérieur du domaine impose par continuité une certaine température (la fonction h) à la frontière. L'extérieur fait office de thermostat.

Nous allons nous intéresser au régime stationnaire, qui correspond au moment où le système s'est stabilisé. L'approche du régime dynamique est similaire mais fait de plus appel aux techniques de la section précédente.

En régime stationnaire, la dérivée temporelle disparaît. On est alors amené à résoudre le problème suivant :

$$(D_S) \begin{cases} \text{trouver } u \in C^2(\mathcal{D}) \cap C^0(\overline{\mathcal{D}}) \text{ vérifiant} \\ \Delta u = 0 \text{ sur } \mathcal{D} \\ u|_{\overline{\mathcal{D}}} = f \end{cases}$$

Les solutions de ce problème sont les fonctions harmoniques sur \mathcal{D} , qui vérifient les conditions aux limites.

4.2.1 Fonctions harmoniques et propriété de moyenne

Soit O un ouvert connexe de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$, borné et tel que $d(O, \partial\mathcal{D}) > 0$. Soit $x \in O$. On définit le temps T de sortie de O partant de x par

$$T = \inf\{t \geq 0; W_t^x \notin O\}.$$

C'est un temps d'arrêt relativement à la filtration associée à W^x . On a le résultat suivant :

Proposition 4.11. *Si u est harmonique sur \mathcal{D} , alors pour tout $x \in O$, on a*

$$u(x) = \mathbb{E}[u(W_T^x)].$$

PREUVE : Soit $t > 0$. Appliquant la formule d'Itô à $u(W_{t \wedge T}^x)$, qui est bien de classe C^2 sur O , il vient :

$$\begin{aligned} u(W_{t \wedge T}^x) - u(W_0^x) &= \int_0^{t \wedge T} \nabla u(W_s^x) ds + \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge T} \Delta u(W_s^x) ds \\ &= \int_0^t \nabla u(W_{s \wedge T}^x) ds + 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $(u(W_{t \wedge T}^x))_{t \geq 0}$ est une martingale locale, et même une "vraie" martingale car u est continue donc bornée sur O . Ainsi,

$$\mathbb{E}[u(W_{t \wedge T}^x)] = \mathbb{E}[u(W_0^x)] = u(x).$$

Quand t tend vers l'infini, $t \wedge T \rightarrow T$, et par continuité, $W_{t \wedge T}^x \rightarrow W_T^x$. Le théorème de convergence dominée permet de conclure que $u(x) = \mathbb{E}[u(W_T^x)]$.

□

Remarque : Cette proposition traduit le fait que les fonctions harmoniques sur \mathcal{D} ont la propriété de moyenne : pour toute boule incluse dans \mathcal{D} , la valeur de la fonction au centre de la boule est égale à la moyenne des valeurs au bord. En effet, le mouvement brownien ne privilégie aucune direction, et la loi de $W_T^x : \Omega \rightarrow \partial\mathcal{B}(x, r) \subset \mathcal{D}$ est ainsi la loi uniforme sur $\partial\mathcal{B}(x, r)$.

En fait, la réciproque est vraie :

Proposition 4.12. *Si $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, a la propriété de moyenne, alors elle est harmonique et de classe C^∞ sur \mathcal{D} .*

PREUVE : On montre que $u \in C^\infty(\mathcal{D})$ par des techniques classiques d'analyse. Pour l'harmonicité, supposons qu'il existe $x \in \mathcal{D}$ tel que $\Delta u(x) \neq 0$, disons $\Delta u(x) > 0$. Par continuité, u est strictement positive sur une boule $B = B(x, r)$ de rayon $r > 0$. Si T est le temps de sortie de B partant de x , on a pour tout $t \geq 0$

$$u(W_{t \wedge T}^x) - u(W_0^x) = \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge T} \Delta u(X_s) ds + \text{une martingale d'espérance nulle.}$$

Comme $\mathbb{E}[u(W_{t \wedge T}^x) - u(W_0^x)] = 0$ par la propriété de moyenne, on a $\mathbb{E}[\int_0^{t \wedge T} \Delta u(X_s) ds] = 0$. Cela livre une contradiction car $\Delta u(X_s) > 0$ pour $s < T$.

◇

Théorème 4.13. *Les fonctions harmoniques sur \mathcal{D} sont celles qui y ont la propriété de moyenne. De plus, elles sont de classe C^∞ sur \mathcal{D} .*

4.2.2 Un résultat d'unicité

Dans toute la suite, on suppose que f est bornée sur $\partial\mathcal{D}$. C'est une restriction naturelle si on pense au sens physique du problème.

Proposition 4.14. *Supposons que $\forall x \in \mathcal{D}$, $\mathbb{P}[T^x < \infty] = 1$ et que f est bornée sur $\partial\mathcal{D}$. Alors, si le problème (D_S) admet une solution u bornée sur \mathcal{D} , elle est donnée par*

$$u(x) = \mathbb{E}[f(W_T^x)], \quad x \in \overline{\mathcal{D}}.$$

PREUVE :

Pour $n \geq 1$, on pose $D_n = \{x \in \mathcal{D}; d(x, \partial\mathcal{D}) > 1/n\}$. On a $\mathcal{D} = \bigcup_{n \geq 1} D_n$. On se fixe $x \in \mathcal{D}$; pour $n \geq 1$, on note T_n les temps de sortie de D_n partant de x et $T = T^x$. Soit u une solution bornée de (D_S) . On obtient comme dans la preuve de 4.11 :

$$u(x) = \mathbb{E}[u(W_{T_n}^x)].$$

Reste à remarquer que $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$. Comme u est bornée, le théorème de convergence dominée permet de conclure que $u(x) = \mathbb{E}[u(W_T^x)] = \mathbb{E}[f(W_T^x)]$.

□

4.2.3 Ouvert réguliers

Nous allons maintenant chercher sous quelles conditions l'application $u(x) = \mathbb{E}[f(W_{T^x}^x)]$ est solution de (D_S) . Sur $\partial\mathcal{D}$, on a bien $u = f$.

Soient alors $x \in \mathcal{D}$, $r < d(x, \partial\mathcal{D})$ et τ le temps de sortie de $\mathcal{B}(x, r)$ partant de x . Comme f est bornée, on peut utiliser la propriété de Markov forte :

$$\begin{aligned} u(x) = \mathbb{E}[f(W_{T^x}^x)] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(W_{T^x}^x) | \mathcal{F}_\tau]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(W_{T^x - \tau}^y) |_{y=W_\tau^x}]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(W_{T^y}^y) |_{y=W_\tau^x}]] \\ &= \mathbb{E}[u(W_\tau^x)]. \end{aligned}$$

Ainsi, u a la propriété de moyenne sur \mathcal{D} et y est donc harmonique par la proposition 4.12. Reste à montrer que u est continue sur $\overline{\mathcal{D}}$, autrement dit que pour tout $a \in \partial\mathcal{D}$,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \mathcal{D}}} \mathbb{E}[f(W_{T^x}^x)] = f(a).$$

Ce résultat n'est pas vrai en général et nécessite une certaine régularité de l'ouvert \mathcal{D} , que traduit la proposition suivante :

Proposition 4.15. *On suppose que $d \geq 2$. Soit $a \in \partial\mathcal{D}$ et $\tau^a = \inf\{t > 0; W_t^a \notin \mathcal{D}\}$.*

Les énoncés suivants sont équivalents :

(i) $\mathbb{P}[\tau^a = 0] = 1;$

(ii) *Pour tout $\epsilon > 0$, on a*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \mathcal{D}}} \mathbb{P}[\tau^x > \epsilon] = 0.$$

(iii) *Pour toute fonction $f : \partial\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable, bornée et continue en a , on a :*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in \mathcal{D}}} \mathbb{E}[f(W_{T^x}^x)] = f(a);$$

En dimension 1, le point (i) est toujours vérifié (cf proposition 4.20) . Cela amène à la définition suivante, valable en toute dimension :

Définitions 4.16. *Soient $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et pour $x \in \mathcal{D}$, $\tau^x = \inf\{t > 0; W_t^x \notin \mathcal{D}\}$.*

Un point $a \in \partial\mathcal{D}$ est dit régulier si $\mathbb{P}[\tau^a = 0] = 1$.

L'ouvert \mathcal{D} est dit régulier si tous les points de $\partial\mathcal{D}$ sont réguliers.

Remarque : Un point $a \in \partial\mathcal{D}$ est irrégulier si $\mathbb{P}[\tau^a = 0] < 1$. La loi 0-1 de Blumenthal (théorème 2.16) nous assure alors que $\mathbb{P}[\tau^a = 0] = 0$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.15 : Pour clarifier, on suppose sans perte de généralité que $a = 0 \in \partial\mathcal{D}$ et on note $\tau = \tau^a$, $B_r = \mathcal{B}(0, r)$.

(i) \Rightarrow (ii) : Soit $\epsilon > 0$. Pour $\delta > 0$, on définit les fonctions

$$g_\delta(x) = \mathbb{P}[W_s^x \in \mathcal{D}; \delta \leq s \leq \epsilon], \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Elle sont continue en x car :

$$g_\delta(x) = \mathbb{E}[\mathbb{P}[T^y > \epsilon - \delta] | y = W_\delta^x] = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}[T^y > \epsilon - \delta] P_{W_\delta^x}(dy).$$

Et on a

$$g_\delta(x) \downarrow g(x) = \mathbb{P}[W_s^x \in \mathcal{D}; 0 < s \leq \epsilon] = \mathbb{P}[\tau^x > \epsilon] \text{ quand } \delta \rightarrow 0.$$

En particulier, par (i), $g(0) = 0$. Comme $T^x < \tau^x$, on a pour tout $0 < \delta < \epsilon$

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathcal{D}}} \mathbb{P}[\tau^x > \epsilon] \leq \limsup_{x \rightarrow 0} g(x) \leq \limsup_{x \rightarrow 0} g_\delta(x) = g_\delta(0),$$

et finalement, en faisant $\delta \rightarrow 0$:

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathcal{D}}} \mathbb{P}[\tau^x > \epsilon] \leq g(0) = 0.$$

(ii) \Rightarrow (iii) : Soit $x \in \mathcal{D}$. Pour tout $r > 0$, on a

$$\begin{aligned}
1 \geq \mathbb{P}[\|W_{T^x}^x - W_0^x\| < r] &\geq \mathbb{P}[\max_{0 \leq t \leq T^x} \|W_t^x - W_0^x\| < r] \\
&\geq \mathbb{P}[\{\max_{0 \leq t \leq \epsilon} \|W_t^x - W_0^x\| < r\} \cap \{T^x \leq \epsilon\}] \\
&\geq \mathbb{P}[\max_{0 \leq t \leq \epsilon} \|W_t^x - W_0^x\| < r] \times (1 - \mathbb{P}[T^x > \epsilon]) \\
&\geq \mathbb{P}[\max_{0 \leq t \leq \epsilon} \|W_t\| < r] - \mathbb{P}[T^x > \epsilon].
\end{aligned}$$

Alors, sous l'hypothèse (ii), en faisant tendre x vers 0 dans \mathcal{D} puis ϵ vers 0, on obtient par continuité de W :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathcal{D}}} \mathbb{P}[\|W_{T^x}^x - x\| < r] = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathcal{D}}} \mathbb{P}[W_{T^x}^x \in B_{2r}] = 1.$$

Ainsi, si $f : \partial\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, bornée et continue en 0, on a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathcal{D}}} f(W_{T^x}^x) = f(0)$ \mathbb{P} -ps et par convergence dominée :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathcal{D}}} \mathbb{E}[f(W_{T^x}^x)] = f(0).$$

(iii) \Rightarrow (i) : Si 0 n'est pas un point régulier, on a $\mathbb{P}[\tau = 0] = 0$. Comme $d \geq 2$, on a pour tous $b \in \mathbb{R}^d$, $t > 0$, $\mathbb{P}[W_t = b] = 0$, et ainsi

$$\lim_{r \downarrow 0} \mathbb{P}[W_\tau \in B_r] = \mathbb{P}[W_\tau = 0] = 0.$$

Fixons $r > 0$ tel que $\mathbb{P}[W_\tau \in B_r] < 1/4$. Soit $f : \partial\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\text{supp } f \subset B_r$, $f(0) = 1$ et $f \leq 1$. Pour tout $x \in \mathcal{D}$, on a

$$\limsup_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathcal{D}}} \mathbb{E}[f(W_\tau^x)] \leq \limsup_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \in \mathcal{D}}} \mathbb{P}[W_\tau^x \in B_r].$$

On va construire une suite de points (x_n) tendant vers 0 et vérifiant pour tout n , $\mathbb{P}[W_{\tau_n}^{x_n} \in B_r] \leq 1/2$. On obtiendra ainsi une contradiction avec :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[f(W_{\tau_n}^{x_n})] \leq 1/2 < f(0) = 1$$

Posons pour $n \geq 2$, $r_n = r/n$ et T_n le temps de sortie de B_{r_n} partant de 0. Comme $T_n \rightarrow 0$ \mathbb{P} -ps, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[T_n < \tau] = 1$. Or,

$$\begin{aligned}
1/4 &> \mathbb{P}[W_\tau \in B_r] \\
&\geq \mathbb{P}[W_\tau \in B_r, T_n < \tau] \\
&= \mathbb{P}[W_\tau \in B_r, W_{T_n} \in \mathcal{D}] \\
&= \int \mathbf{1}_{\mathcal{D}}(x) \mathbf{1}_{B_r}(y) P_{W_\tau|W_{T_n}}(dy) P_{W_{T_n}}(dx) \\
&= \int \mathbf{1}_{\mathcal{D}}(x) \mathbf{1}_{B_r}(y) P_{W_{T_n}^x}(dy) P_{W_{T_n}}(dx) \\
&= \int_{\mathcal{D}} \mathbb{P}[W_{T_n}^x \in B_r] P_{W_{T_n}}(dx) \\
&\geq \mathbb{P}[W_{T_n} \in \mathcal{D}] \times \inf_{x \in \mathcal{D} \cap B_{r_n}} \{\mathbb{P}[W_{T_n}^x \in B_r]\}.
\end{aligned}$$

On peut choisir n assez grand pour que $\mathbb{P}[W_{T_n} \in \mathcal{D}] = \mathbb{P}[T_n < \tau] \geq 1/2$, et ainsi :

$$\inf_{x \in \mathcal{D} \cap B_{r_n}} \mathbb{P}[W_{T^x}^x \in B_r] < 1/2.$$

Donc pour tout $n \geq 2$, il existe $x_n \in \mathcal{D} \cap B_{r_n}$ tel que $\mathbb{P}[W_{T^x}^x \in B_r] \leq 1/2$.

♡

Suite aux propositions 4.14 et 4.15, on obtient :

Théorème 4.17. *Soit \mathcal{D} un ouvert régulier vérifiant $\forall x \in \mathcal{D}, \mathbb{P}[T^x < \infty] = 1$. Si f est bornée sur $\partial\mathcal{D}$, alors le problème (D_S) admet une unique solution bornée donnée par*

$$u(x) = \mathbb{E}[f(W_T^x)], \quad x \in \overline{\mathcal{D}}.$$

Lemme 4.18. *Si l'ouvert $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$ est borné dans une direction, alors*

$$\forall x \in \mathcal{D}, \mathbb{P}[T^x < \infty] = 1.$$

PREUVE : Comme chaque coordonnée d'un mouvement brownien d -dimensionnel est un mouvement brownien unidimensionnel, il suffit de prouver le résultat pour un ouvert borné de \mathbb{R} , donc pour un intervalle ouvert $I =]a, b[$, $-\infty < a < b < \infty$.

Pour $x \notin I$, $T^x = 0$. Pour $x \in I$, la formule d'Itô donne :

$$(W_{t \wedge T^x}^x)^2 - (W_0^x)^2 = 2 \int_0^{t \wedge T^x} W_s^x dW_s^x + t \wedge T^x.$$

L'intégrale ci-dessus est une martingale d'espérance nulle donc :

$$\mathbb{E}[t \wedge T^x] = \mathbb{E}[(W_{t \wedge T^x}^x)^2 - (W_0^x)^2] \leq \max(a^2, b^2).$$

On fait tendre $t \rightarrow \infty$ et on conclut par le lemme de Fatou que $\mathbb{E}[t \wedge T^x] < \infty$, ce qui prouve le lemme.

□

Cela amène le résultat physiquement essentiel :

Corollaire 4.19. *Si l'ouvert \mathcal{D} est borné et régulier alors le problème (D_S) admet une unique solution bornée sur \mathcal{D} .*

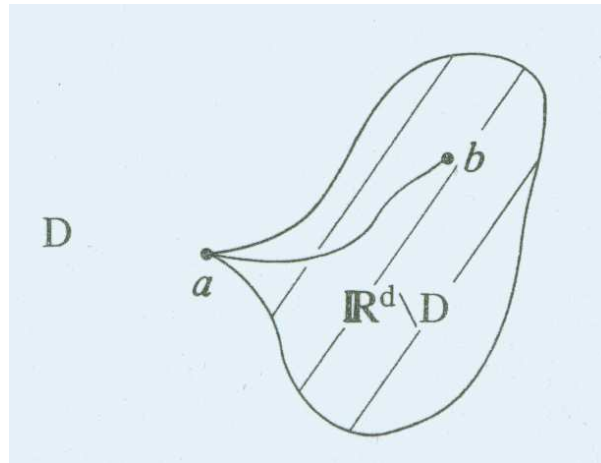
4.2.4 Exemples d'ouverts réguliers

Voici quelques résultats, exemples et contre-exemples illustrant cette notion de régularité. On se rend compte à quel point la classe des ouverts réguliers est grande, et notamment bien plus que ceux de classe C^1 (i.e. ceux dont la frontière est C^1), que l'on considère habituellement dans les approches analytiques classiques.

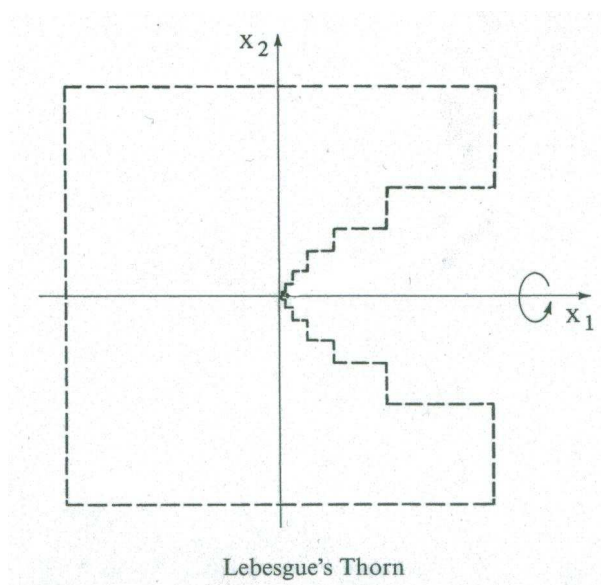
Exemple 1 : Le point central du disque épointé $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^2; 0 < \|x\| < 1\}$ est un point irrégulier.

Proposition 4.20. *En dimension 1, tout ouvert est régulier.*

Proposition 4.21. Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert et $a \in \partial\mathcal{D}$. S'il existe un chemin dans $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}$ reliant a à un point $b \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{D}$ alors a est régulier.



Exemple 2 : En dimension 3, l'épine de Lebesgue (Lebesgue's thorn) est un exemple d'ouvert irrégulier bien que de complémentaire connexe par arcs.



Proposition 4.22. (condition du cône de Poincaré) Si pour un point $a \in \partial\mathcal{D}$, on peut inclure un cône de sommet a dans $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{D}$, alors a est un point régulier.

5 Equations différentielles stochastiques

Les entiers naturels d et r sont fixés. On se donne des applications Borel-mesurables

$$b_i, \sigma_{ij} :]0, \infty] \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}; \quad 1 \leq i \leq d, \quad 1 \leq j \leq r$$

et on leur associe le vecteur $b = (b_i)$ et la matrice $\sigma = (\sigma_{ij})$ de taille $(d \times r)$. On va chercher à donner un sens à l'équation différentielle stochastique suivante, où l'inconnue est le processus continu $(X_t)_{t \geq 0}$:

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \quad (5.1)$$

soit composante par composante :

$$dX_t^{(i)} = b_i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^r \sigma_{ij}(t, X_t)dW_t^{(j)}, \quad 1 \leq i \leq d.$$

Le processus $\{W_t, \mathcal{F}_t^0; 0 \leq t < \infty\}$ représente le mouvement brownien standard de dimension r . Souvenons-nous que $(\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}$ a été choisie complète.

On suppose que la tribu \mathcal{F} sur notre espace Ω est assez riche pour qu'il existe un vecteur aléatoire ξ , à valeurs dans \mathbb{R}^d , indépendant de \mathcal{F}_∞^0 .

On agrandit alors la filtration $(\mathcal{F}_t^0)_{t \geq 0}$ en posant pour tout $t \geq 0$

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\xi, W_s; 0 \leq s \leq t).$$

Proposition 5.1. *La filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est complète et le processus $\{W_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ est toujours un mouvement brownien.*

5.1 Solutions fortes

Définition 5.2. *Une solution forte de l'équation (5.1), partant de ξ , est un processus continu $(X_t)_{t \geq 0}$ vérifiant les conditions suivantes :*

- (i) X est adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$;
- (ii) $\mathbb{P}[X_0 = \xi] = 1$;
- (iii) Pour tous $t \geq 0$, $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq r$,

$$\mathbb{P} \left[\int_0^t |b_i(s, X_s)| + \sigma_{ij}^2(s, X_s) ds < \infty \right] = 1;$$

- (iv) Pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \quad \mathbb{P}\text{-ps.} \quad (5.2)$$

Définition 5.3. *On dira que l'équation (5.1) admet au plus une solution forte si pour deux solutions fortes X et Y , on a*

$$\mathbb{P} [X_t = Y_t; 0 \leq t < \infty] = 1.$$

En pratique, on vérifiera le résultat suivant, équivalent dans le cas continu :

$$\mathbb{P} [X_t = Y_t] = 1 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Les normes utilisées sont les normes euclidiennes sur \mathbb{R}^n . Ainsi, lorsqu'on écrit $\|\sigma(t, x)\|$, il s'agit de la norme euclidienne dans \mathbb{R}^{dr} .

Définition 5.4. *L'application $a : [0, \infty[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sera dite globalement lipschitzienne s'il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\|a(t, x) - a(t, y)\| \leq K\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \forall t \geq 0.$$

Elle sera dite localement lipschitzienne si elle est lipschitzienne sur tout compact de \mathbb{R}^n .

Théorème 5.5. *Si b et σ sont localement lipschitziennes par rapport à la variable espace, alors l'équation (5.1) admet au plus une solution forte.*

Prouvons d'abord un lemme fort classique et fort utile :

Lemme 5.6. *(lemme de Gronwall) Soient $T > 0$ et $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue, vérifiant pour tout $0 \leq t \leq T$,*

$$0 \leq g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t g(s) ds$$

où $\beta > 0$ et $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. Alors pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$g(t) \leq \alpha(t) + \beta \int_0^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)} ds.$$

PREUVE : Posons $y(t) = \int_0^t \beta g(s) ds$. On a $y'(t) = \beta g(t)$ et donc y vérifie pour $0 \leq s \leq T$

$$\begin{aligned} y'(s) &\leq \beta\alpha(s) + \beta y(s) \\ e^{-\beta s}(y'(s) - \beta y(s)) &\leq e^{-\beta s}\beta\alpha(s) \\ (y(s)e^{-\beta s})' &\leq e^{-\beta s}\beta\alpha(s) \end{aligned}$$

et comme $y(0) = 0$, on obtient en intégrant entre 0 et $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} y(t)e^{-\beta t} &\leq \int_0^t \beta e^{-\beta s}\alpha(s) ds \\ \int_0^t \beta g(s) ds &\leq \beta \int_0^t e^{\beta(t-s)}\alpha(s) ds \\ g(t) - \alpha(t) &\leq \beta \int_0^t e^{\beta(t-s)}\alpha(s) ds \end{aligned}$$

○

PREUVE DU THÉORÈME 5.5 : Soit $K_n > 0$ une constante telle que, pour tous $x, y \in \mathcal{B}(0, n)$, $t \geq 0$, on ait

$$\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \leq K_n\|x - y\|.$$

Supposons que X et Y soient deux solutions fortes partant de ξ de (5.1). On introduit les temps d'arrêt

$$T_n = \inf\{t \geq 0; \|X_t\| \geq n \text{ ou } \|Y_t\| \geq n\}, \quad n > 0.$$

On a clairement, par continuité des trajectoires, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = +\infty$ \mathbb{P} -as.

De plus, pour $T > 0$ et $0 \leq t \leq T$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|X_{t \wedge T_n} - Y_{t \wedge T_n}\|^2 &= \mathbb{E} \left\| \int_0^{t \wedge T_n} b(s, X_s) - b(s, Y_s) ds + \int_0^{t \wedge T_n} \sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s) dW_s \right\|^2 \\ &\leq 4\mathbb{E} \left\| \int_0^{t \wedge T_n} b(s, X_s) - b(s, Y_s) ds \right\|^2 \\ &\quad + 4 \sum_{i=1}^d \mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^r \int_0^{t \wedge T_n} \sigma_{ij}(s, X_s) - \sigma_{ij}(s, Y_s) dW_s^{(j)} \right|^2. \end{aligned}$$

La proposition 3.7 donne alors :

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^d \mathbb{E} \left| \sum_{j=1}^r \int_0^{t \wedge T_n} \sigma_{ij}(s, X_s) - \sigma_{ij}(s, Y_s) dW_s^{(j)} \right|^2 \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j,k=1}^r \int_0^{t \wedge T_n} \mathbb{E} \left| \sigma_{ij}(s, X_s) - \sigma_{ij}(s, Y_s) \right| \left| \sigma_{ik}(s, X_s) - \sigma_{ik}(s, Y_s) \right| d\langle W_s^{(j)}, W_s^{(k)} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^r \int_0^{t \wedge T_n} \mathbb{E} |\sigma_{ij}(s, X_s) - \sigma_{ij}(s, Y_s)|^2 ds \\ &= \int_0^{t \wedge T_n} \mathbb{E} \|\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le premier terme :

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \|X_{t \wedge T_n} - Y_{t \wedge T_n}\|^2 \\ &\leq 4t \int_0^{t \wedge T_n} \mathbb{E} \|b(s, X_s) - b(s, Y_s)\|^2 ds + \int_0^{t \wedge T_n} \mathbb{E} \|\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)\|^2 ds \\ &\leq 4 \int_0^{t \wedge T_n} t \mathbb{E} \|b(s, X_s) - b(s, Y_s)\|^2 + \mathbb{E} \|\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s)\|^2 ds \\ &\leq 4K_n(T+1) \int_0^{t \wedge T_n} \mathbb{E} \|X_s - Y_s\|^2 ds \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall avec $g(t) = \mathbb{E} \|X_{t \wedge T_n} - Y_{t \wedge T_n}\|^2$ permet de conclure que

$$\mathbb{E} \|X_{t \wedge T_n} - Y_{t \wedge T_n}\|^2 = 0 \text{ pour tout } n > 0.$$

Ainsi, $\mathbb{P} [X_{t \wedge T_n} = Y_{t \wedge T_n}] = 1$ pour tout $t \geq 0$, et en faisant $n \rightarrow \infty$, on a finalement

$$\mathbb{P} [X_t = Y_t] = 1 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

□

Théorème 5.7. *Si b et σ sont globalement lipschitziennes de rapport $L > 0$ et vérifient de plus, pour tous $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$\|b(t, x)\|^2 + \|\sigma(t, x)\|^2 \leq L^2(1 + \|x\|^2), \quad (5.3)$$

alors l'équation (5.1) admet une solution forte partant de ξ .

De plus, si $\mathbb{E}\|\xi\|^2 < \infty$, alors il existe une solution forte X de carré intégrable vérifiant, pour tout $0 \leq t \leq T$,

$$\mathbb{E}\|X_t\|^2 \leq C(1 + \mathbb{E}\|\xi\|^2)e^{Ct},$$

pour une certaine constante C dépendant uniquement de T et de L .

PREUVE : On se place dans le cas $\mathbb{E} \|\xi\|^2 < \infty$. On va montrer que la suite de processus $(X^n)_{n \geq 0}$, définie par $X^0 = \xi$ et

$$X_t^{n+1} = \xi + \int_0^t b(s, X_s^n) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dW_s, \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

converge vers une solution forte de l'équation (5.1).

étape 1 : Pour tous $n \geq 1$, $0 \leq t \leq T$, il existe $M > 0$, dépendant de L, T et ξ , telle que

$$\mathbb{E} \|X_t^n - X_t^{n-1}\|^2 \leq (1 + \mathbb{E} \|\xi\|^2) \frac{(Mt)^n}{n!}.$$

Procédons par récurrence. Soient $T > 0$, $0 \leq t \leq T$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|X_t^1 - X_t^0\|^2 &= \mathbb{E} \left\| \int_0^t b(s, \xi) ds + \int_0^t \sigma(s, \xi) dW_s \right\|^2 \\ &\leq 4t \int_0^t \mathbb{E} \|b(s, \xi)\|^2 ds + 4 \int_0^t \mathbb{E} \|\sigma(s, \xi)\|^2 ds \\ &\leq 4L^2(T+1) \int_0^t \mathbb{E}[1 + \|\xi\|^2] ds \\ &\leq M(1 + \mathbb{E} \|\xi\|^2)t \end{aligned}$$

en posant $M = 4L^2(T+1)$. La propriété est donc vraie au rang 1. Supposons-la vraie au rang n . En utilisant les mêmes techniques, il vient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|X_t^{n+1} - X_t^n\|^2 &\leq 4t \int_0^t \mathbb{E} \|b(s, X_s^n) - b(s, X_s^{n-1})\|^2 ds \\ &\quad + 4 \int_0^t \mathbb{E} \|\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s^{n-1})\|^2 ds \\ &\leq 4L^2(t+1) \int_0^t \mathbb{E} \|X_s^n - X_s^{n-1}\|^2 ds \\ &\leq M \int_0^t (1 + \mathbb{E} \|\xi\|^2) \frac{(Ms)^n}{n!} ds \\ &\leq (1 + \mathbb{E} \|\xi\|^2) \frac{(Mt)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

étape 2 : Convergence de $(X^n)_{n \geq 0}$.

Posons $E = 4TL^2(T+4)(1 + \mathbb{E} \|\xi\|^2)$. En utilisant l'inégalité de Doob, on obtient

$$\mathbb{E} \left[\max_{0 \leq s \leq T} \|X_s^{n+1} - X_s^n\|^2 \right] \leq 4TL^2(T+4) \max_{0 \leq s \leq T} \mathbb{E} \|X_s^n - X_s^{n-1}\|^2 \leq \frac{(MT)^n E}{n!}.$$

L'inégalité de Tchebychev amène alors, pour tout $n \leq 1$,

$$\mathbb{P} \left[\max_{0 \leq s \leq T} \|X_s^{n+1} - X_s^n\| > \frac{1}{2^n} \right] \leq 4^n \mathbb{E} \left[\max_{0 \leq s \leq T} \|X_s^{n+1} - X_s^n\|^2 \right] \leq \frac{(4MT)^n E}{n!},$$

qui est le terme général d'une série convergente. Du lemme de Borel-Cantelli, on déduit que pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe $N(\omega) > 0$ tel que, pour tout $n > N(\omega)$, on ait

$$\max_{0 \leq s \leq T} \|X_s^{n+1}(\omega) - X_s^n(\omega)\| \leq \frac{1}{2^n},$$

et donc pour tout $k \geq 1$,

$$\max_{0 \leq s \leq T} \|X_s^{n+k}(\omega) - X_s^n(\omega)\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La suite $(X^n(\omega))_{n \geq 0}$ à valeurs dans $(C([0, T]), \|\cdot\|_\infty)$ est donc presque sûrement de Cauchy. Donc elle converge uniformément presque sûrement vers un processus $X = (X_t)_{t \geq 0}$. Donc $(X^n(\omega))_{n \geq 0}$, à valeurs dans $(C([0, \infty[), \|\cdot\|_\infty)$, converge presque sûrement vers X , et uniformément sur tout compact. En particulier, X est un processus continu.

étape 3 : Le processus X ainsi construit est une solution forte de l'équation (5.1).

En effet, par construction, les points (i) et (ii) de la définition 5.2 sont acquis. La condition (5.3) et la continuité de X assurent le point (iii). Reste à montrer que X vérifie l'équation intégrale (5.4). Fixons $t > 0$. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \|X_t - (\xi + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s)\|^2 \\ &= \mathbb{E} \|X_t - X_t^{n+1} + X_t^{n+1} - \xi - \int_0^t b(s, X_s) ds - \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s\|^2 \\ &\leq \mathbb{E} \|X_t - X_t^{n+1}\|^2 + \mathbb{E} \|\int_0^t b(s, X_s^n) - b(s, X_s) ds\|^2 + \mathbb{E} \|\int_0^t \sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s) dW_s\|^2 \\ &\leq \mathbb{E} \|X_t - X_t^{n+1}\|^2 + 4t \int_0^t \mathbb{E} \|b(s, X_s^n) - b(s, X_s)\|^2 ds + 4 \int_0^t \mathbb{E} \|\sigma(s, X_s^n) - \sigma(s, X_s)\|^2 ds \\ &\leq \mathbb{E} \|X_t - X_t^{n+1}\|^2 + (4t + 1)L^2t \int_0^t \mathbb{E} [\max_{0 \leq s \leq t} \|X_s - X_s^n\|^2] \end{aligned}$$

et cette expression tend vers 0. Ainsi, pour tout $t > 0$, on a presque sûrement

$$X_t = \xi + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s.$$

étape 4 : Prouvons la majoration. Pour tous $n \geq 1$, $0 \leq t \leq T$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|X_t^n\|^2 &= \mathbb{E} \|X_t^n - X_t^{n-1} + X_t^{n-1} - \dots + X_t^1 - \xi + \xi\|^2 \\ &\leq \mathbb{E} \|X_t^n - X_t^{n-1}\|^2 + \dots + \mathbb{E} \|X_t^1 - \xi\|^2 + \mathbb{E} \|\xi\|^2 \\ &\leq E \sum_{k=1}^n \frac{(Mt)^k}{k!} + \mathbb{E} \|\xi\|^2 \\ &\leq (1 + \mathbb{E} \|\xi\|^2) e^{Mt} + \mathbb{E} \|\xi\|^2 \\ &\leq (1 + 2\mathbb{E} \|\xi\|^2) e^{Mt} \end{aligned}$$

et le résultat s'obtient grâce au lemme de Fatou.

★

Remarques :

- Dans le cas général, on montre que la suite de processus $(X^n)_{n \geq 0}$, uniques solutions fortes des équations $X_t^n = \xi \mathbf{1}_{\|\xi\| \leq n} + \int_0^t b(s, X_s^n) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^n) dW_s$, $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, permettent de définir une solution forte X de (5.1) en posant pour tous $t \geq 0$, $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega) = X_t^n(\omega)$ avec $k > \|\xi(\omega)\|$.
- Si l'on considère un problème local, où on cherche des solutions sur l'intervalle $[0, T]$ pour $0 < T < \infty$, alors la condition (5.3) est inutile car elle découle directement de l'hypothèse de Lipschitz. On obtient ainsi le corollaire suivant :

Corollaire 5.8. *(théorème de Cauchy-Lipschitz stochastique ?) Si b et σ sont localement lipschitziennes alors l'équation (5.1) admet localement une solution unique.*

5.2 Lien avec les EDP

La partie 4 a montré le lien entre la théorie stochastique et certaines EDP. Par des techniques assez proches, nous allons voir que ce lien est en fait plus général.

On suppose que pour tout $s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, il existe un processus $(X_t^{s,x})_{t \geq s}$ continu, vérifiant l'équation intégrale

$$X_t^{s,x} = x + \int_s^t b(r, X_r^{s,x}) dr + \int_s^t \sigma(r, X_r^{s,x}) dW_r. \quad (5.4)$$

On pose

$$\sigma \sigma^* = A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \text{ ie } a_{ij} = \sum_{k=1}^r \sigma_{ik} \sigma_{jk};$$

$$L(s, x) = \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^d a_{ij}(s, x) \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i x_j} + \sum_{i=1}^d b_i(s, x) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

On considère le problème suivant pour $T > 0$:

$$(P_T) \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in C^{1,2}([0, T[\times \mathbb{R}^d) \cap C([0, T] \times \mathbb{R}^d) \text{ vérifiant} \\ (L(s, x) - \partial_s)u(s, x) = 0 \quad \text{pour tous } (s, x) \in [0, T[\times \mathbb{R}^d \\ u(T, x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^d \end{array} \right.$$

où f est une application continue donnée de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} .

Proposition 5.9. *Si u est une solution bornée de P_T , elle est unique et donnée par*

$$u(s, x) = \mathbb{E}[f(X_T^{s,x})].$$

PREUVE : Fixons $s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ et posons $X_t = X_t^{s,x}$ pour $s \leq t < T$. On a

$$\begin{aligned} (t, X_t) &= (t, 0) + (0, \int_s^t b(r, X_r) dr) + (0, \int_s^t \sigma(r, X_r) dW_r) \\ &= (t, 0) + (0, A_t) + (0, M_t). \end{aligned}$$

où $A_t = \int_s^t b(r, X_r) dr$ est un vecteur de d processus continus à variations bornées avec

$$dA_t^{(i)} = b_i(t, X_t) dt;$$

où $M_t = \int_s^t \sigma(r, X_r) dW_r$ est un vecteur de d martingales continues telles que

$$d\langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle_t = a_{ij}(t, X_t) dt.$$

En effet, pour $1 \leq i, j \leq d$, on a :

$$\begin{aligned} M^{(i)} M^{(j)} &= \left(\sum_{k=1}^r \int_s^t \sigma_{ik}(r, X_r) dW_r^{(k)} \right) \left(\sum_{l=1}^r \int_s^t \sigma_{jl}(r, X_r) dW_r^{(l)} \right) \\ &= \sum_{k,l=1}^r \int_s^t \sigma_{ik}(r, X_r) \sigma_{jl}(r, X_r) d\langle W^{(k)}, W^{(l)} \rangle_r \\ &= \sum_{k=1}^r \int_s^t \sigma_{ik}(r, X_r) \sigma_{jk}(r, X_r) dr \\ &= \int_s^t a_{ij}(r, X_r) dr, \end{aligned}$$

qui est un processus continu à variations bornées, de premier terme nul. Ainsi, par unicité du terme d'écart quadratique, on en déduit que $M^i M^j = \langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle = \int_s^t a_{ij}(r, X_r) dr$. On applique alors la formule d'Itô à $u(t, X_t)$ pour $s \leq t < T$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} u(t, X_t) - u(s, X_s) &= \int_s^t \frac{\partial u}{\partial t}(r, X_r) dr + \sum_{i=1}^d \int_s^t \frac{\partial u}{\partial x_i}(r, X_r) dA_r^{(i)} \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \int_s^t \frac{\partial u}{\partial x_i}(r, X_r) dM_r^{(i)} + \sum_{i,j=1}^d \int_s^t \frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j}(r, X_r) d\langle M^{(i)}, M^{(j)} \rangle_r \\ &= \int_s^t \frac{\partial u}{\partial s}(r, X_r) dr + \sum_{i=1}^d \int_s^t b_i(r, X_r) \frac{\partial u}{\partial x_i}(r, X_r) dr \\ &\quad + \sum_{i=1}^d \int_s^t \frac{\partial u}{\partial x_i}(r, X_r) dM_r^{(i)} + \sum_{i,j=1}^d \int_s^t a_{ij}(r, X_r) \frac{\partial u}{\partial x_i \partial x_j}(r, X_r) dr \\ &= \sum_{i=1}^d \int_s^t \frac{\partial u}{\partial x_i}(r, X_r) dM_r^{(i)} \end{aligned}$$

Comme u est bornée, la dernière intégrale est une martingale pour $s \leq t \leq T$, d'espérance nulle. Ainsi,

$$\mathbb{E}[f(X_T)] = \mathbb{E}[u(T, X_T)] = \mathbb{E}[u(s, X_s)] = u(x, s).$$

■

Remarques :

1. Ce résultat peut être affiné : il n'est pas nécessaire que la solution soit bornée.
2. En prenant $\sigma = \text{Id}_{\mathbb{R}^d}$ et $b = 0$, le mouvement brownien standard partant de x vérifie l'équation (5.4) et on retrouve en quelque sorte la première partie du théorème 4.4

5.3 Solutions faibles

Pour appliquer le résultat précédent, il n'est pas nécessaire d'avoir une solution forte. Il suffit de disposer de processus continus vérifiant les équation intégrales (5.4). De plus, tout ceci est indépendant du choix du mouvement brownien. C'est pourquoi on s'intéresse à des solutions dites faibles :

Définition 5.10. Une solution faible de l'équation (5.1), partant de ξ , est un triplet $S = ((X, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ vérifiant les conditions suivantes :

- (i) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé ;
- (ii) $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0} \subset \mathcal{F}$ est une filtration telle que le processus ξ soit \mathcal{F}_0 -mesurable ;

- (iii) W est un mouvement brownien adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$;
- (iv) X est une solution forte de (5.1) dans l'espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et le mouvement brownien W .

Définition 5.11. On dira que l'équation (5.1) admet une solution à trajectoires uniques si pour deux solutions faibles $S^1 = ((X^1, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t^1)_{t \geq 0})$, $S^2 = ((X^2, W), (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), (\mathcal{F}_t^2)_{t \geq 0})$, on a

$$\mathbb{P}[X_0^1 = X_0^2] = 1 \implies \mathbb{P}[X_t^1 = X_t^2, 0 \leq t < \infty] = 1.$$

On dira que l'équation (5.1) admet une solution unique en loi si pour deux solutions S^1 et S^2 , on a

$$X_0^1 \sim X_0^2 \implies X^1 \sim X^2.$$

5.3.1 Le théorème de Girsanov

On se donne un mouvement brownien W d -dimensionnel sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ complète. Soit $X = (X^{(1)}, \dots, X^{(d)})$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et tel que

$$\mathbb{P}\left[\int_0^t (X_s^{(k)})^2 dt < \infty\right] = 1; \quad 1 \leq k \leq d, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Les intégrales stochastiques $\int_0^t X_s^{(k)} dW_s^{(k)}$ sont ainsi définies pour tous k , t . On définit le processus $Z(X)$ par

$$Z_t(X) = \exp\left[\sum_{k=1}^d \int_0^t X_s^{(k)} dW_s^{(k)} - \frac{1}{2} \int_0^t \|X_s^{(k)}\|^2 ds\right].$$

La formule d'Itô amène l'égalité

$$Z_t(X) = 1 + \sum_{k=1}^d \int_0^t Z_s(X) X_s^{(k)} dW_s^{(k)},$$

montrant que $Z(X)$ est une martingale locale continue. Sous certaines conditions, ce sera une vraie martingale.

Supposons ainsi que $Z(X)$ soit une martingale. On a donc $\mathbb{E}[Z_t(X)] = 1$, $t \geq 0$. Pour tout $T \geq 0$, on définit alors sur \mathcal{F}_T la probabilité $\tilde{\mathbb{P}}_T$:

$$\tilde{\mathbb{P}}_T(A) = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Z_t(X)], \quad A \in \mathcal{F}_T.$$

L'espérance sous $\tilde{\mathbb{P}}_T$ sera notée $\tilde{\mathbb{E}}_T$. Comme $Z(X)$ est une martingale, on a pour $s \leq t$ et $A \in \mathcal{F}_s$, $\tilde{\mathbb{P}}_t(A) = \tilde{\mathbb{P}}_s(A)$.

Lemme 5.12. Soient $0 \leq s \leq t \leq T$ et Y une variable aléatoire \mathcal{F}_t -mesurable, telle que $\tilde{\mathbb{E}}_T[|Y|] < \infty$. On a :

$$\tilde{\mathbb{E}}_T[Y|\mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s(X)} \mathbb{E}[Y Z_t(X)|\mathcal{F}_s], \quad \tilde{\mathbb{P}}_T \text{ et } \mathbb{P} \text{ ps.}$$

PREUVE : Pour $A \in \mathcal{F}_s$, on a :

$$\tilde{\mathbb{E}}_T[\mathbf{1}_A \frac{1}{Z_s(X)} \mathbb{E}[Y Z_t(X) | \mathcal{F}_s]] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbb{E}[Y Z_t(X) | \mathcal{F}_s]] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A Y Z_t(X)] = \tilde{\mathbb{E}}_T[\mathbf{1}_A Y].$$

□

On fixe $T \geq 0$. On note $\mathcal{M}_T^{c,loc}$ l'ensemble des martingales locales, continues $M = \{\tilde{M}_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, telles que $M_0 = 0$ \mathbb{P} -ps. $\tilde{\mathcal{M}}_T^{c,loc}$ est l'équivalent sur $(\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{\mathbb{P}}_T)$. On associe à $M \in \mathcal{M}_T^{c,loc}$ le processus :

$$\tilde{M}_t = M_t - \sum_{i=1}^d \int_0^t X_s^{(i)} d\langle M, W^{(i)} \rangle_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Lemme 5.13. *Sous $\tilde{\mathbb{P}}$, le processus \tilde{M} est une martingale relativement à $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ et pour $M, N \in \mathcal{M}_T^{c,loc}$,*

$$\langle \tilde{M}, \tilde{N} \rangle = \langle M, N \rangle.$$

PREUVE : Par localisation, on peut se restreindre au cas où les processus $M, \langle M \rangle, Z(X), \sum_{i=1}^d \int_0^t (X_s^{(i)})^2 ds$ sont bornés. Dans ce cas-là, l'inégalité de Kunita et Watanabe amène pour $0 \leq t \leq T, 1 \leq i \leq d$:

$$\left| \int_0^t X_s^{(i)} d\langle M, W^{(i)} \rangle_s \right| \leq \langle M \rangle_t \int_0^t X_s^{(i)} ds,$$

et ainsi \tilde{M} est aussi bornée. Par les lemmes 3.15 puis 3.10, on obtient :

$$\begin{aligned} Z_t(X) \tilde{M}_t - \langle M, Z(X) \rangle_t &= \int_0^t \tilde{M}_s dZ_s(X) + \int_0^t Z_s(X) d\tilde{M}_s \\ &= \int_0^t \tilde{M}_s dZ_s(X) + \int_0^t Z_s(X) dM_s - \sum_{i=1}^d \int_0^t Z_s(X) X_s^{(i)} d\langle M, W^{(i)} \rangle_s. \end{aligned}$$

Mais

$$\langle M, Z(X) \rangle_t = \langle M, 1 \rangle_t + \sum_{i=1}^d \langle M, \int_0^t Z_s(X) X_s^{(i)} dW_s^{(i)} \rangle = \sum_{i=1}^d \int_0^t Z_s(X) X_s^{(i)} d\langle M, W^{(i)} \rangle_s.$$

et ainsi

$$Z_t(X) \tilde{M}_t = \int_0^t \tilde{M}_s dZ_s(X) + \int_0^t Z_s(X) dM_s,$$

qui est une martingale sous \mathbb{P} . Pour $0 \leq s \leq t \leq T$, on a alors d'après le lemme 5.12

$$\tilde{\mathbb{E}}_T[\tilde{M}_t | \mathcal{F}_s] = \frac{1}{Z_s(X)} \mathbb{E}[\tilde{M}_t Z_t(X) | \mathcal{F}_s] = \tilde{M}_s.$$

Et donc $\tilde{M} \in \tilde{\mathcal{M}}_T^{c,loc}$. Pour $M, N \in \mathcal{M}_T^{c,loc}$, on a par le lemme 3.15

$$\tilde{M}_t \tilde{N}_t - \langle M, N \rangle_t = \int_0^t \tilde{M}_s d\tilde{N}_s + \int_0^t \tilde{N}_s d\tilde{M}_s.$$

Le terme de droite est une martingale sous $\tilde{\mathbb{P}}$. Par unicité du terme d'écart quadratique, on en déduit que $\langle \tilde{M}, \tilde{N} \rangle = \langle M, N \rangle$.

□

On définit le processus $\tilde{W} = \{\tilde{W}_t = (\tilde{W}_t^{(1)}, \dots, \tilde{W}_t^{(d)}), \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ par

$$\tilde{W}_t^{(i)} = W_t^{(i)} - \int_0^t X_s^{(i)} ds; \quad 1 \leq i \leq d, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Théorème 5.14. (Théorème de Girsanov) *Pour tout $T \geq 0$, le processus $\{\tilde{W}_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$ est un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{\mathbb{P}}_T)$.*

PREUVE : D'après le lemme précédent, $\tilde{W}^{(i)}$ est dans $\tilde{\mathcal{M}}_T^{c,loc}$ pour tout $1 \leq i \leq d$. De plus, pour $1 \leq i \leq d$, $0 \leq t \leq T$,

$$\langle \tilde{W}^{(i)}, \tilde{W}^{(j)} \rangle_t = \langle W^{(i)}, W^{(j)} \rangle_t = t\delta_{ij}.$$

On conclut en utilisant le théorème de Paul Lévy. □

5.3.2 Applications

On considère l'équation différentielle stochastique :

$$dX_t = b(t, X_t)dt + dW_t, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.5)$$

Le théorème de Girsanov permet de donner certains résultats d'existence et d'unicité.

Existence : Soit $X_t = (X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(d)})$ un mouvement brownien pour $0 \leq t \leq T$, de distribution initiale μ , pour la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Supposons que le processus

$$Z(b(t, X_t)) = \exp \left[\sum_{k=1}^d \int_0^t b_k(s, X_s) dX_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|b(s, X_s)\|^2 ds \right]$$

soit une martingale pour $0 \leq t \leq T$. Le théorème de Girsanov amène que le processus $W = (W_t^{(1)}, \dots, W_t^{(d)})$, donné pour $1 \leq i \leq d$, $0 \leq t \leq T$ par

$$W_t^{(i)} = X_t^{(i)} - X_0^{(i)} - \int_0^t b_i(s, X_s) ds$$

est un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{\mathbb{P}}_T)$, pour $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$. Ainsi,

$$X_t = X_0 + W_t + \int_0^t b(s, X_s) ds.$$

Le triplet $(X, W), (\Omega, \mathcal{F}_T, \tilde{\mathbb{P}}_T), (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est donc une solution faible de (5.5).

Unicité en loi : Soient $(X^{(k)}, W^{(k)}), (\Omega^{(k)}, \mathcal{F}^{(k)}, \mathbb{P}^{(k)}), (\mathcal{F}_t^{(k)})_{0 \leq t \leq T}$, $k = 1, 2$ deux solutions faibles de (5.5). Supposons les processus

$$Z(b(t, X_t^{(k)})) = \exp \left[\sum_{k=1}^d \int_0^t b_k(s, X_s^{(k)}) dW_s^{(k)} - \frac{1}{2} \int_0^t \|b(s, X_s^{(k)})\|^2 ds \right], \quad k = 1, 2$$

soient des martingales pour $0 \leq t \leq T$. Alors d'après le théorème de Girsanov, pour $k = 1, 2$, les processus

$$X_t^{(k)} = W_t^{(k)} + X_0^{(k)} + \int_0^t b(s, X_s^{(k)}) ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

sont des mouvements browniens sur $(\Omega^{(k)}, \mathcal{F}_T^{(k)}, \tilde{\mathbb{P}}_T^{(k)})$, pour $(\mathcal{F}_t^{(k)})_{0 \leq t \leq T}$. Ainsi, pour $0 \leq t \leq T$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{(1)}[X_t^{(1)} \in A] &= \tilde{\mathbb{E}}_t^{(1)} \left[\frac{1}{Z_t(X^{(1)})} \mathbf{1}_{[X_t^{(1)} \in A]} \right] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}_t^{(2)} \left[\frac{1}{Z_t(X^{(2)})} \mathbf{1}_{[X_t^{(2)} \in A]} \right] \\ &= \mathbb{P}^{(2)}[X_t^{(2)} \in A]. \end{aligned}$$

On a donc ainsi que $X^1 \sim X^2$.

Dans les deux cas, il est essentiel de trouver des conditions effectives sur X pour que le processus $Z(X)$ soit une vraie martingale. On peut en trouver dans ([1]). En particulier, l'hypothèse b bornée sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$ est suffisante.

L'exemple de Tanaka : C'est un exemple très instructif.

On définit la fonction sgn sur \mathbb{R} par $sgn(x) = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x \leq 0 \end{cases}$ et on considère l'équation

$$dX_t = sgn(X_t) dW_s, \quad t \geq 0.$$

Cette équation admet une solution faible mais pas de solution forte. On a unicité en loi, mais pas unicité des trajectoires.

5.4 Quelques exemples

Certains phénomènes peuvent être modélisés par des équations différentielles stochastiques. En voici deux célèbres dont on sait expliciter les solutions :

Equation de Langevin : il s'agit de l'équation suivante :

$$dX_t = -\alpha X_t + \beta dW_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

où α et β sont des constantes positives. Elle a une unique solution donnée par

$$X_t = X_0 e^{-\alpha t} + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Découlant de la loi de Newton, elle modélise le déplacement d'une particule brownienne (le pollen par exemple) dans un fluide. Le premier terme représente la force de frottement visqueux, le deuxième terme une force aléatoire créée par les collisions avec les particules de fluides. L'hypothèse de Langevin consiste justement à choisir cette force proportionnelle à dW_t .

Equation de Black et Scholes : Cette équation modélise l'évolution de la valeur d'un stock, que représente le processus X :

$$dX_t = \alpha X_t + \beta X_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

où α et β sont des constantes positives. Elle a une unique solution donnée par

$$X_t = X_0 \exp\left(\left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right)t + \beta W_t\right), \quad 0 \leq t \leq T.$$

5.5 Problèmes non linéaires

L'approche de problèmes non linéaires a été très lointaine. Mais comme dans les cas linéaires, on peut souvent se ramener à des problèmes d'ordre probabiliste. La suite en donne une approche rapide.

On reprend les hypothèses et les notations de la partie 5.2, si ce n'est l'équation différentielle du problème (P_T) , remplacée par

$$(L(s, x) - \partial_s)u(s, x) = g(s, x, u(s, x)) \text{ pour tous } (s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d,$$

où g est une application continue de $[0, T] \times \mathbb{R}^{d+1}$ dans \mathbb{R} . On a de la même façon que si v est une solution bornée du problème, alors v vérifie :

$$v(s, x) = \mathbb{E}\left[f(X_T^{s,x}) + \int_s^T g(r, X_r^{s,x}, v(r, X_r^{s,x})) dr\right].$$

On introduit la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq s}$, définie par

$$\mathcal{F}_t^s = \sigma(X_r^{s,x}, s \leq r \leq t), t \geq s.$$

Remarquons que \mathcal{F}_s^s est une tribu triviale. On suppose de plus que pour $0 \leq s \leq T$, il existe un unique processus $(Y_t^{s,x})_{s \leq t \leq T}$ vérifiant

$$Y_t^{s,x} = \mathbb{E}\left[f(X_T^{s,x}) + \int_t^T g(r, X_r^{s,x}, Y_r^{s,x}) dr \mid \mathcal{F}_t^s\right]. \quad (5.6)$$

On a

$$Y_s^{s,x} = \mathbb{E}\left[f(X_T^{s,x}) + \int_s^T g(r, X_r^{s,x}, Y_r^{s,x}) dr\right] = v(s, x).$$

L'unicité et le fait que $X_T^{s,x} = X_T^{t, X_t^{s,x}}$ amènent $Y_t^{s,x} = Y_t^{t, X_t^{s,x}} = v(t, X_t^{s,x})$. Ainsi,

$$v(s, x) = \mathbb{E}\left[f(X_T^{s,x}) + \int_s^T g(r, X_r^{s,x}, Y_r^{s,x}) dr\right].$$

La recherche de solutions bornées du problème s'est donc ramenée à celles des processus $X^{s,x}$ et $Y^{s,x}$ vérifiant respectivement (5.4) et (5.6) pour $s \leq t \leq T$. Cependant, résoudre l'équation (5.6) n'est pas aisé. Dans certains cas, on peut trouver des problèmes équivalents. En particulier, si on cherche un processus $Y^{s,x}$ tel que

$$\mathbb{E}\left[\left|f(X_T^{s,x}) + \int_t^T g(r, X_r^{s,x}, Y_r^{s,x}) dr\right|^2\right] < \infty,$$

alors cela revient à chercher un couple de processus $(Y^{s,x}, Z^{s,x})$ adaptés à \mathcal{F}_t^s et vérifiant

$$Y_t^{s,x} = f(X_T^{s,x}) + \int_t^T g(r, X_r^{s,x}, Y_r^{s,x}) dr - \int_t^T Z_r^{s,x} dW_r.$$

Cela mène à la théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades.

6 Conclusion

Le rapport montre un lien entre analyse et probabilités. Les outils probabilistes fournissent en effet une nouvelle approche de problèmes analytiques. Même si certains résultats semblent venir facilement de cette façon, il ne faut pas oublier qu'ils découlent souvent de la formule d'Itô et de l'importante théorie qu'elle cache. On ne s'est attaché ici qu'à montrer le lien avec les solutions classiques, c'est-à-dire régulières, des équations différentielles. Cependant, on peut aussi obtenir de façon probabiliste des résultats concernant des solutions faibles, ou des solutions dites de viscosité, notion qui m'est encore inconnue...

Mais outre les concepts mathématiques entrevus, ce stage a été l'occasion de préciser mes centres d'intérêt en mathématiques. Il m'est notamment apparu que l'étude d'équations différentielles hors de leur contexte d'application perdait à mon sens grand intérêt. Sur la fin, j'ai donc cherché à en savoir plus sur les applications au "monde réel". L'économie est un domaine d'application immédiat, les équations stochastiques permettent de modéliser certains phénomènes financiers. L'université de Torun dispense certains cours dans le domaine. En physique, il semble y avoir des applications en physique statistique notamment. Il a été difficile de s'attarder sur un point spécifique, par manque de temps et de références.

Références

- [1] I. KARATZAS, S. E. SCHREVE - *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag New York, 1988.
- [2] R. DURRETT - *Brownian Motion and Martingales*. Wadsworth Mathematics Series, 1984.
- [3] M. M. RAU - *Stochastic Processes and Integration*. Sijthoff & Noordhoff, 1979.
- [4] E. DIBENEDETTO - *Partial Differential Equations*. Birkhäuser, 1995.
- [5] K. BITCHELER - *Stochastic Integration with Jumps*. Cambridge University Press, 2002.

Remerciements

Andrzej Roskosz, Philippe Briand, Vincent pour LateX, Lukasz et bis et Marysia, Mylena, Ezequiel el clandestino, Paul Auster et la lune, Ludo pour les photos, Gaëlle et Elsa, François C'min pour l'histoire, Aurélien pour le toit, les écureuils, Nikolaus Kopernikus, SkyEurope, le Thé, un peu de Wodka ?