

# UN EXEMPLE DE SYSTEME DYNAMIQUE ALGEBRIQUE

Mickaël Crampon et Vincent Pit

Encadrant : Serge Cantat

Travaux d'Etude et de Recherche, Master 1<sup>re</sup> année de Maths

13 mai 2005

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Entropie topologique</b>	<b>2</b>
2.1	Définitions . . . . .	2
2.2	Quelques propriétés . . . . .	4
2.3	Exemples . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Mesures invariantes et ergodiques</b>	<b>6</b>
3.1	Existence d'une mesure invariante . . . . .	6
3.2	Existence d'une mesure ergodique . . . . .	7
3.3	Intérêt des mesures ergodiques . . . . .	9
3.4	Exemples . . . . .	9
<b>4</b>	<b>Un système dynamique particulier</b>	<b>10</b>
4.1	Description . . . . .	10
4.2	Définition d'une mesure sur ce système . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Etude informatique du système dynamique</b>	<b>11</b>
5.1	Tour d'horizon des programmes développés . . . . .	11
5.2	TRAJ : dessin des trajectoires . . . . .	14
5.3	MEASURE : répartition des points . . . . .	16
5.4	La surface de Wang . . . . .	19

# 1 Préliminaires

Ce rapport constitue une introduction à la description des systèmes dynamiques. On s'intéresse en général à des espaces  $(X, d)$  métriques compacts, munis d'une application  $f : X \rightarrow X$ , supposée continue (et qui l'est donc uniformément). Le but est de comprendre l'action des itérés de  $f$  sur  $X$ , c'est-à-dire l'action du groupe  $\mathbf{Z}$  sur  $X$  via  $f$ . Nous allons ainsi définir des outils permettant de décrire cette action et donc en quelque sorte de classer les systèmes dynamiques.

On dit que deux systèmes dynamiques  $f : X \rightarrow X$  et  $g : Y \rightarrow Y$  sont conjugués s'il existe une bijection  $h : X \rightarrow Y$ , telle que  $h \circ f = g \circ h$ . Selon les propriétés de  $f$ , les deux systèmes seront dits homéomorphes, difféomorphes... Les systèmes dynamiques sont décrits à conjugaison près, au sens où nous cherchons à développer des outils invariants par conjugaison.

## 2 Entropie topologique

C'est l'une des premières quantités qui permet de décrire un système dynamique. Elle est invariante à homéomorphisme près. Elle décrit la complexité exponentielle du système dynamique, c'est-à-dire des orbites sous  $f$  des points de  $X$ .

### 2.1 Définitions

Il y a plusieurs définitions équivalentes de l'entropie topologique. Nous allons ici en donner trois mais il en existe d'autres.

On définit la suite de distances  $(d_n)_{n \in \mathbf{N}}$  sur  $X$  par :

$$\forall x, y \in X, d_n(x, y) = \max_{0 \leq k \leq n} d(f^k(x), f^k(y)).$$

Toutes ces métriques sont équivalentes car  $f$  est uniformément continue sur  $X$ .

Pour tout  $\epsilon > 0$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ , on considère alors des recouvrements de  $X$  par des ouverts de diamètre au plus  $\epsilon$  pour la métrique  $d_n$ . On note  $D(f, n, \epsilon)$  le nombre minimum d'ouverts nécessaires (qui est bien fini puisque  $X$  est compact).

**Lemme 2.1.** *Pour tout  $\epsilon > 0$ , la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(D(f, n, \epsilon))$  existe et est finie. On la note  $h_\epsilon(f)$ .*

PREUVE : Pour  $\epsilon > 0$  et  $0 \leq m \leq n$  deux entiers, soient  $U \subset X$  un ouvert de diamètre inférieur à  $\epsilon$  pour la métrique  $d_m$  et  $V \subset X$  un ouvert de diamètre inférieur à  $\epsilon$  pour la métrique  $d_n$ . L'ouvert  $U \cap f^{-m}(V)$  est alors de diamètre inférieur à  $\epsilon$  pour la métrique  $d_{n+m}$ .

Considérons alors un premier recouvrement fini de  $X$  par des ouverts  $(U_1, \dots, U_i)$  de diamètre inférieur à  $\epsilon$  pour  $d_n$  et un second par des ouverts  $(V_1, \dots, V_j)$  de diamètre inférieur à  $\epsilon$  pour  $d_m$ . On a alors :

$$X = f^{-m}(X) = f^{-m}\left(\bigcup_{k=1}^j V_k\right) = \bigcup_{k=1}^j f^{-m}(V_k) = \bigcup_{l=1}^i \bigcup_{k=1}^j (U_l \cap V_k).$$

L'ensemble d'ouverts  $\{U_l \cap V_k, 0 \leq l \leq i, 0 \leq k \leq j\}$ , de cardinal  $ij$ , forme alors un recouvrement de  $X$  par des ouverts de diamètre inférieur à  $\epsilon$  pour la métrique  $d_{n+m}$ . D'où l'inégalité :

$$D(f, m+n, \epsilon) \leq D(f, n, \epsilon)D(f, m, \epsilon).$$

La suite  $(\log D(f, n, \epsilon))_{n \in \mathbf{N}}$  est donc sous-additive, ce qui implique que  $(\frac{1}{n} \log D(f, n, \epsilon))_{n \in \mathbf{N}}$  converge.

□

**Définition 2.2.** *L'entropie topologique est alors la quantité définie par :*

$$h_{top}(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D(f, n, \epsilon) \right].$$

Pour tout  $\epsilon > 0$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ , considérons les parties  $A$  de  $X$  vérifiant (N) :  $\forall x, y \in A, d_n(x, y) > \epsilon$ . Comme  $X$  est compact, ces parties sont finies et on note  $N(f, \epsilon, n)$  le cardinal maximal d'une telle partie.

A contrario, on considère les parties  $A$  de  $X$  vérifiant (S) :  $\forall x \in X, \exists a \in A$  tel que  $d_n(x, a) < \epsilon$ . On note  $S(f, \epsilon, n)$  le cardinal minimal d'une telle partie (il existe des parties finies car  $X$  est compact).

**Lemme 2.3.** *Pour tout  $\epsilon > 0$  et tout  $n \in \mathbf{N}$ , on a*

$$D(f, 2\epsilon, n) \leq S(f, \epsilon, n) \leq N(f, \epsilon, n) \leq D(f, \epsilon, n)$$

PREUVE : Soit  $n \in \mathbf{N}$  et  $\epsilon > 0$ .

- Posons  $S = S(f, \epsilon, n)$  et choisissons une partie  $A = (x_1, \dots, x_S)$  de  $X$  vérifiant la condition (S). L'ensemble des boules de rayon  $\epsilon$  et de centres  $(x_i)_{1 \leq i \leq S}$  recouvre alors  $X$ . On obtient ainsi la première inégalité.

- Soit  $A$  une partie maximale de  $X$  vérifiant (N). Si elle ne vérifie pas (S) alors on peut trouver un point  $x$  de  $X$  tel que  $d_n(x, A) > \epsilon$ ; ainsi,  $A \cup \{x\}$  vérifie encore (N), ce qui contredit la maximalité de  $A$ . Cela donne la seconde égalité.

- Posons  $D = D(f, \epsilon, n)$  et soit  $(B_1, \dots, B_D)$  un ensemble de boules de rayon  $\epsilon$  qui recouvrent  $X$ . L'ensemble des centres de ces boules vérifie la condition (N) et on a la dernière inégalité.

□

Ainsi, l'entropie topologique peut être définie de façon équivalente par :

$$\begin{aligned} h_{top}(f) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log D(f, n, \epsilon) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(f, n, \epsilon) \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S(f, n, \epsilon) \right]. \end{aligned}$$

## 2.2 Quelques propriétés

**Proposition 2.4.** *L'entropie topologique :*

- (i) ne dépend pas de la métrique choisie pour définir la topologie de  $X$  ;
- (ii) est invariante à homéomorphisme près.

**Proposition 2.5.** (i) Pour tout entier  $m \geq 0$ ,  $h_{top}(f^m) = m.h_{top}(f)$  ;

(ii) Si  $f$  est inversible, alors  $h_{top}(f^{-1}) = h_{top}(f)$ , et pour tout  $m \in \mathbf{Z}$ ,

$h_{top}(f^m) = |m| h_{top}(f)$  ;

(iii) Si  $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une famille de fermés  $f$ -invariants recouvrant  $X$  alors :

$$h_{top}(f) = \max_{0 \leq i \leq n} h_{top}(f|_{A_i}).$$

En particulier, pour tout fermé  $f$ -invariant  $A$  de  $X$ , on a :  $h_{top}(f|_A) \leq h_{top}(f)$ .

$(X, d)$  étant compact, il existe pour tout  $\epsilon > 0$  un nombre minimal  $b(\epsilon)$  de boules de rayon inférieur à  $\epsilon$  qui permettent de recouvrir  $X$ . On note

$$D(X) = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{\log b(\epsilon)}{\log \epsilon} \in \mathbf{R} \cup \{\infty\}$$

**Proposition 2.6.** *On suppose que  $D(X) < +\infty$  et que  $f$  est  $k$ -lipschitzienne. Alors*

$$h_{top}(f) \leq D(X) \max(0, \log K).$$

PREUVE : Soient  $L > \max(1, K)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ . Pour tout  $0 \leq m \leq n$  et tous  $x, y \in X$ , on a :

$$d(f^m(x), f^m(y)) \leq L^m d(x, y) \leq L^n d(x, y).$$

Ainsi, si  $d(x, y) < \epsilon L^{-n}$  alors  $d(f^m(x), f^m(y)) < \epsilon$ , c'est-à-dire pour tout  $x \in X$ ,  $B_d(x, \epsilon L^{-n}) \subset B_{d_n}(x, \epsilon)$ . On a donc  $D(f, n, \epsilon) \leq b(\epsilon L^{-n})$  et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} D(f, n, \epsilon) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} b(\epsilon L^{-n}).$$

Or,

$$\frac{1}{n} b(\epsilon L^{-n}) = \frac{\log(L^{-n}\epsilon)}{n} \frac{b(\epsilon L^{-n})}{\log(L^{-n}\epsilon)} = \frac{\log \epsilon - n \log L}{n} \frac{b(\epsilon L^{-n})}{\log(L^{-n}\epsilon)},$$

expression dont la limite supérieure en  $n$  est  $\log(L)D(X)$ . Ainsi,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} D(f, n, \epsilon) \leq \log(L)D(X)$$

d'où le résultat. □

## 2.3 Exemples

1. Les isométries ont une entropie topologique nulle puisque pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $d_n = d$ .
2. On considère le cercle  $S^1$ , ensemble des complexes de module 1, et on définit pour  $m \in \mathbf{Z}^*$  l'application :

$$E_m : S^1 \longrightarrow S^1 \\ z \longmapsto z^m$$

**Proposition 2.7.** *Pour ce système dynamique,  $h_{top}(E_m) = \log|m|$ .*

PREUVE : On peut supposer  $m > 0$ . Pour  $x, y \in S^1$ , on a  $d(x, y) = \frac{1}{2\pi} |\arg(x) - \arg(y)|$ .

Ainsi, pour  $n \in \mathbf{N}^*$  et dès que  $d(x, y) < \frac{1}{2m^n}$ , on a pour  $k \leq n$ ,

$$d_k(x, y) = d(E_m^k(x), E_m^k(y)) = m^k d(x, y).$$

Fixons  $n, k \in \mathbf{N}^*$ . Pour  $x, y \in S^1$  tels que  $d(x, y) < \frac{1}{2m^n}$ , on a :

$$d_n(x, y) > \frac{1}{k} \iff d(E_m^n(x), E_m^n(y)) > \frac{1}{km^n}.$$

Ainsi, on obtient exactement  $N(E_m, 1/k, n) = km^n$ . D'où :

$$\begin{aligned} h_{top}(E_m) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log N(E_m, \frac{1}{k}, n) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log k}{n} + \log m \\ &= \log m. \end{aligned}$$

□

3. Soit  $S \in SL(2, \mathbf{Z})$  de trace  $Tr(S) > 2$  et de valeurs propres  $\lambda$  et  $1/\lambda$  ( $|\lambda| > 1$ ). On note encore  $S$  l'automorphisme de  $\mathbf{R}^2$  associé. Celui-ci induit un unique automorphisme du tore  $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ , que l'on note  $\tilde{S}$ .

**Proposition 2.8.** *Pour ce système dynamique,  $h_{top}(\tilde{S}) = \log|\lambda|$ .*

PREUVE : On appelle  $u_1$  et  $u_2$  les vecteurs propres associées aux valeurs propres  $\lambda$  et  $1/\lambda$ . Ils forment une base de  $\mathbf{R}^2$ . On considère la norme uniforme associée à cette base :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^2, d(x, y) = \|x - y\|_\infty = \max((x - y) \cdot u_1, (x - y) \cdot u_2).$$

Cette distance  $d$  est invariante par translations entières et induit donc une métrique  $\tilde{d}$  sur le tore (via la projection canonique  $\Pi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$ ) définie par :

$$\forall x, y \in \mathbf{T}^2, \tilde{d}(x, y) = d(\Pi^{-1}(x), \Pi^{-1}(y)).$$

L'application  $\Pi$  est une isométrie pour ces métriques et on peut ainsi travailler directement dans  $\mathbf{R}^2$ .

Soit  $\epsilon > 0$  et  $n \in \mathbf{N}$ . Pour la métrique  $d_n$  associée à  $d$  et  $S$ , une boule de rayon  $\epsilon$  est un parallélogramme de côtés  $2|\lambda|^{-n}\epsilon$  dans la direction  $u_1$  et  $2\epsilon$  dans la direction  $u_2$ . L'aire d'un tel parallélogramme est au plus  $4|\lambda|^{-n}\epsilon^2$ . Le nombre de boules nécessaires pour couvrir le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  est donc supérieur à  $1/4|\lambda|^{-n}\epsilon^2$  donc :

$$h_\epsilon(\tilde{S}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left( \frac{|\lambda|^n}{4\epsilon^2} \right) = \log |\lambda|.$$

Donc finalement  $h_{top}(\tilde{S}) \geq \log |\lambda|$ .

D'autre part, pour  $n \in \mathbf{N}$  et  $\epsilon$  assez petit, on peut considérer un recouvrement du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$  par des boules disjointes de rayon  $\epsilon$  pour  $d_n$  (puisque ce sont des parallélogrammes) et qui soient toutes incluses dans le carré  $[-1, 2] \times [-1, 2]$ . L'aire d'une telle boule est  $C|\lambda|^{-n}\epsilon^2$ , où  $0 < C \leq 4$  dépend de l'angle entre  $u_1$  et  $u_2$ . On en déduit que :

$$h_\epsilon(\tilde{S}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left( \frac{9|\lambda|^n}{C\epsilon^2} \right) = \log |\lambda|.$$

Et on obtient donc  $h_{top}(\tilde{S}) = \log |\lambda|$ . □

Remarquons que dans les deux cas, on aurait pu utiliser la proposition 2.6.

### 3 Mesures invariantes et ergodiques

On se place toujours dans le cadre d'un système dynamique  $f : X \rightarrow X$ , où  $X$  est compact et  $f$  continue. On cherche à construire des mesures  $f$ -invariantes permettant de décrire la répartition asymptotique des itérés d'un point  $x$  de  $X$ .

#### 3.1 Existence d'une mesure invariante

Soient  $x \in X$  et  $U$  un ouvert de  $X$ . Pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , on note  $N_n(x, U)$  le nombre d'entiers  $0 \leq k \leq n-1$  tels que  $f^k(x) \in U$ . On définit la limite, lorsqu'elle existe,

$$N(x, U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} N_n(x, U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_U(f^k(x)),$$

où  $\chi_U$  est la fonction caractéristique de  $U$ . On peut réécrire ceci sous la forme :

$$N(x, U) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \chi_U d\mu_n$$

où  $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x)}$  définit une mesure de probabilité sur  $X$ .

On va construire grâce à cette suite de mesures une mesure de probabilité  $\mu$   $f$ -invariante sur l'espace  $X$ , i.e. vérifiant pour tout borélien  $A \subset X$ ,  $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ .

De façon équivalente mais plus adaptée ici, on peut travailler avec l'ensemble des fonctions continues au lieu de travailler avec les indicatrices. Ainsi, pour toute fonction continue  $\varphi$  sur  $X$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , posons  $J_n(\varphi) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x))$ .  $X$  étant compact, la suite  $(J_n(\varphi))_{n \in \mathbf{N}}$  est bornée et on peut donc en extraire une sous-suite convergente.

L'espace  $C(X)$  des fonctions continues sur  $X$  étant séparable, considérons un sous-ensemble dense  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$  de  $C(X)$ . Par extraction diagonale, on peut alors construire une suite  $(n_k)_{k \in \mathbf{N}}$  d'entiers de sorte que les suites  $(J_{n_k}(\varphi_m))_{k \in \mathbf{N}}$  convergent pour tout  $m \geq 1$ . Posons :

$$J(\varphi_m) = \lim_{k \rightarrow \infty} J_{n_k}(\varphi_m) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{n_k} \sum_{p=0}^{n_k-1} \varphi_m(f^p(x)).$$

Par densité, cette définition s'étend à l'ensemble des fonctions continues et on obtient donc une forme linéaire, positive et bornée sur  $C(X)$ . Elle est également  $f$ -invariante au sens où  $J(\varphi \circ f) = J(\varphi)$ . D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une unique mesure  $\mu_x$  telle que  $J(\varphi) = \int_X \varphi d\mu_x$ . De plus, pour tout borélien  $A \subset X$ ,  $\mu_x(A) = J(\chi_A) = J(\chi_A \circ f) = J(\chi_{f^{-1}(A)}) = \mu_x(f^{-1}(A))$ . La mesure  $\mu_x$  est donc  $f$ -invariante.

## 3.2 Existence d'une mesure ergodique

**Définition 3.1.** *On dit qu'une mesure de Borel  $\mu$  sur  $X$  est ergodique (relativement à  $f$ ) si tout borélien  $f$ -invariant  $A \subset X$  est de mesure 0 ou 1.*

Supposons que l'on dispose d'une mesure  $\mu$   $f$ -invariante sur notre espace  $X$ . Alors  $\mu$  est ergodique si et seulement si toute fonction  $f$ -invariante, mesurable et à valeurs réelles, est constante  $\mu$ -presque sûrement. Par densité de  $L^\infty(X)$  dans l'ensemble des fonctions mesurables sur  $X$ , c'est équivalent au résultat suivant, qu'on utilise pour prouver l'ergodicité d'une mesure :

**Proposition 3.2.** *La mesure  $\mu$  est ergodique si et seulement si toute fonction  $f$ -invariante et bornée est constante  $\mu$ -presque sûrement.*

PREUVE :

$\Rightarrow$  : Soit  $\varphi : X \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction  $f$ -invariante, et soit  $a \in \varphi(X)$ . L'ensemble  $\varphi^{-1}(a)$  est  $f$ -invariant car si  $x \in \varphi^{-1}(a)$ ,  $\varphi(f(x)) = \varphi(x) = a$ . Pour tout  $A \subset \varphi(X)$ , on a donc  $\mu(\varphi^{-1}(A)) = 0$  ou 1.

Or, pour tout  $\epsilon > 0$  et par compacité de  $\varphi(X)$ , il existe  $a_\epsilon \in \varphi(X)$  tel que :

$$\mu(\varphi^{-1}(B(a_\epsilon, \epsilon))) = 1,$$

i.e. on a presque sûrement :

$$a_\epsilon - \epsilon \leq \varphi(x) \leq a_\epsilon + \epsilon$$

et donc en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0, on obtient que  $\varphi$  est presque sûrement constante ( $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} a_\epsilon$  existe car pour  $\epsilon' < \epsilon$ , on peut choisir  $a_{\epsilon'} \in (B(a_\epsilon, \epsilon))$ )

$\Leftarrow$  : Soit  $A \subset X$  un borélien  $f$ -invariant. L'indicatrice  $\mathbf{1}_A$  est presque sûrement constante, ce qui implique  $\mu(A) = 0$  ou 1.  $\square$

Nous allons montrer qu'il existe sur  $X$  une mesure ergodique relativement à  $f$ . Le même type de preuve et un théorème de point fixe auraient pu nous permettre de démontrer l'existence d'une mesure invariante ; toutefois, la preuve précédente a l'avantage de construire explicitement une telle mesure.

Notons  $\mathcal{M}$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $X$ . Muni de la topologie faible, cet espace est convexe et compact. La compacité se démontre en utilisant la séparabilité de  $C(X)$  et un procédé d'extraction diagonale.

L'ensemble  $\mathcal{M}(f) \subset \mathcal{M}$  des mesures  $f$ -invariantes est convexe et fermé dans  $\mathcal{M}$ , donc compact. De plus, si  $\mu \in \mathcal{M}(f)$  n'est pas ergodique, il existe un borélien  $A \subset X$  tel que  $0 < \mu(A) < 1$ .

On peut alors définir deux mesures  $\mu_A$  et  $\mu_{A^c}$  par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(X), \mu_A(B) = \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}, \mu_{A^c}(B) = \frac{\mu(A^c \cap B)}{\mu(A^c)}.$$

Et on a alors  $\mu = \mu(A)\mu_A + \mu(A^c)\mu_{A^c}$ . Ainsi, les points extrémaux du convexe  $\mathcal{M}(f)$  sont constitués des mesures ergodiques. Il suffit alors de prouver qu'il y a des points extrémaux...

Considérons une famille dense  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$  de  $C(X)$  et la suite décroissante  $\mathcal{M}(f) = \mathcal{M}_0 \supset \mathcal{M}_1 \supset \dots \supset \mathcal{M}_n \supset \dots$  définie par :

$$\mathcal{M}_{i+1} = \left\{ \mu \in \mathcal{M}_i, \int_X \varphi_{i+1} d\mu = \max_{\nu \in \mathcal{M}_i} \int_X \varphi_{i+1} d\nu \right\}$$

Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , l'application  $A_i : \nu \rightarrow \int_X \varphi_{i+1} d\nu$  est continue sur  $\mathcal{M}_i$ , donc on en déduit inductivement que les sous-ensembles  $\mathcal{M}_i$  sont des fermés non vides de  $\mathcal{M}(f)$  donc des compacts non vides. L'intersection  $\mathcal{I} = \bigcap_{i=0}^{\infty} \mathcal{M}_i$  est donc non vide. On va montrer qu'elle n'est constitué que de mesures ergodiques.

Soit  $\mu \in \mathcal{I}$ . Supposons qu'il existe 2 mesures différentes  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}(f)$  et  $0 < \lambda < 1$  tels que  $\mu = \lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$ . Notons  $m_0 = \max_{\nu \in \mathcal{M}_0} A_0(\nu)$ . Comme  $\mu \in \mathcal{M}_1$ ,

$$m_0 = \int_X \varphi_1 d\mu = \lambda \int_X \varphi_1 d\mu_1 + (1 - \lambda) \int_X \varphi_1 d\mu_2.$$

Puisque  $m_0$  est le maximum de la fonction  $A_0$ , on en déduit nécessairement que  $\int_X \varphi_1 d\mu_1 = \int_X \varphi_1 d\mu_2 = m_0$  i.e.  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_1$ .

Par récurrence, on obtient que  $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{I}$ , et par densité que pour toute fonction  $\varphi \in C(X)$ ,  $\int_X \varphi d\mu_1 = \int_X \varphi d\mu_2 = \int_X \varphi d\mu$ . L'unicité de la mesure dans le théorème de représentation de Riesz nous assure alors que  $\mu = \mu_1 = \mu_2$  et donc finalement que  $\mu$  est ergodique.



### 3.3 Intérêt des mesures ergodiques

Supposons que l'on dispose d'une mesure  $\mu$   $f$ -invariante sur notre espace  $X$ . Le théorème ergodique de Birkhoff, que nous admettrons, affirme que pour toute fonction  $\varphi \in L^1(X)$ , la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(f^k(x)) = \Phi(x)$$

existe pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ .

Si la mesure  $\mu$  est de plus ergodique, on obtient que la fonction  $\Phi$   $f$ -invariante est presque sûrement constante. Cette constante n'est autre que  $\int \varphi d\mu$  car pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\int \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi \circ f^k d\mu = \int \varphi d\mu$$

(on le montre d'abord pour les fonctions  $\varphi$  étagées, puis positives puis quelconques).

Ainsi, en passant à la limite par le théorème de convergence dominée, on obtient que  $\int \Phi d\mu = \int \varphi d\mu$  et comme  $\Phi$  est p.s. constante et que  $\mu(X) = 1$ , on obtient le résultat.

Cela signifie que la moyenne dans l'espace  $X$  d'une fonction par rapport à une mesure ergodique est égale à la "moyenne temporelle" i.e. des itérés de  $x \in X$  quelconque.

### 3.4 Exemples

On considère le cercle  $S^1$ , ensemble des complexes de module 1. Nous allons montrer que la mesure de Lebesgue  $\lambda$  sur le cercle est ergodique pour les rotations  $\mathcal{R}_\alpha$  d'angle  $0 < \alpha < 2\pi$  irrationnel, et pour les fonctions  $E_m, |m| \geq 2$ .

1. Rotations d'angle irrationnel :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\alpha : S^1 &\longrightarrow S^1 \\ x &\longmapsto x + \alpha \pmod{1}. \end{aligned}$$

Soit  $f \in L^\infty(S^1)$   $\mathcal{R}_\alpha$ -invariante. Comme  $L^\infty(S^1) \subset L^2(S^1, \lambda)$ , la série de Fourier de  $f$ ,  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n \exp(2i\pi nx)$ ,  $x \in [0, 1]$ , converge en norme  $L^2$  vers  $f$ . Comme  $f$  et  $f \circ \mathcal{R}_\alpha$  sont presque partout égales, on en déduit par unicité des coefficients de Fourier que  $\forall n \in \mathbf{Z}$ ,  $a_n = a_n \exp(2i\pi n\alpha)$ . Comme  $\exp(2i\pi n\alpha) \neq 1$  pour  $n \neq 0$ , on a que  $f$  est presque partout constante. Par la propriété ..., la mesure  $\lambda$  est donc ergodique pour  $\mathcal{R}_\alpha$ .

2. La preuve pour  $E_m$  est similaire. On prend  $f \in L^\infty(S^1)$   $E_m$ -invariante. Par unicité des coefficients de Fourier et comme  $f = f \circ E_m$   $\lambda$ -p.p, on obtient  $a_n = a_{n.m}$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ . Avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , on en déduit que  $f$  est presque sûrement constante et  $\lambda$  est ainsi ergodique pour  $E_m$ .

3. La mesure de Lebesgue  $\lambda_T$  sur le tore est ergodique pour l'action du groupe  $SL(2, \mathbf{Z})$ . En effet, prenons un borélien  $A \subset \mathbf{T}^2 = S^1 \times S^1$  de mesure non nulle. On note  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les projections sur chaque cercle et pour  $i \in \{1, 2\}$ ,

$$A_i = \{x \in \pi_i(A), \arg(x)/2\pi \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \lambda(\pi_j \circ \pi_i^{-1}(x)) > 0\} \subset S^1.$$

Comme  $A$  est de mesure non nulle,  $A_1$  et  $A_2$  sont de mesure strictement positive. Pour tout  $x \in A_1$ , l'élément  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  livre alors une rotation "d'angle irrationnel" sur  $\{x\} \times S^1$  qui laisse  $\pi_1^{-1}(x)$  invariant. Comme la mesure de Lebesgue sur le cercle est ergodique pour ces rotations, on en déduit que  $\pi_1^{-1}(x) = \{x\} \times S^1$ . Ainsi,  $A$  contient  $A_1 \times S^1$  et comme  $\lambda(A_1) > 0$  on obtient  $A_2 = S^1$ . De la même façon,  $A_1 = S^1$ , i.e.  $A = \mathbf{T}^2$ .

En fait, par un argument d'analyse de Fourier, on peut même montrer que la mesure de Lebesgue sur le tore est ergodique pour les automorphismes  $\tilde{S}$  vus précédemment.

## 4 Un système dynamique particulier

### 4.1 Description

On se place dans l'espace compact  $\mathcal{X} = \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ .

On se donne un polynôme  $P \in \mathbf{C}[X, Y, Z]$  et on définit  $X = P^{-1}(0) \subset \mathcal{X}$ . L'espace  $X$  est fermé, donc compact. De plus, on suppose que le polynôme  $P$  est de degré 2 en chaque variable et qu'il est "lisse à l'infini", c'est-à-dire lisse sur  $\mathcal{X}$  tout entier. Les surfaces de ce type seront dites " $\mathbb{K}^3$ ".

Pour cela, on vérifie que  $P$  est une submersion sur  $\mathcal{X}$ . Pour le montrer à "l'infini", on fait les changements de carte successifs  $x \rightarrow \frac{1}{x}, y \rightarrow \frac{1}{y}, z \rightarrow \frac{1}{z}$  puis 2 à 2, et tous ensembles...

**Exemple :** on considère  $P([x_1 : x_2], [y_1 : y_2], [z_1 : z_2]) = 0$  en coordonnées homogènes et on suppose  $y_2 \neq 0, z_2 \neq 0$ , qu'on peut donc choisir égaux à 1. Ainsi,

$$P(x_1 : x_2, y_1 : y_2, z_1 : z_2) = 0 \iff x_2^2 P(x_1/x_2, y_1, z_1) = 0.$$

Si  $x_1 \neq 0$ , on regarde donc le polynôme  $x^2 P(1/x, y, z)$ , dont la différentielle doit être non nulle, en particulier en  $x = 0$ , qui correspond au point à l'infini.

A  $y$  et  $z$  fixés, le polynôme  $P$  a 2 racines complexes en  $x$ .  $\sigma_x$  est l'application qui au point  $(x_0, y_0, z_0) \in X$  associe le point  $(x'_0, y_0, z_0) \in X$ , où  $x'_0$  est l'autre racine de  $P$  pour  $y_0$  et  $z_0$  fixés. On définit de la même façon les applications  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . On obtient ainsi trois involutions et on pose  $f = \sigma_z \circ \sigma_y \circ \sigma_x : X \longrightarrow X$ .

C'est notre système dynamique...

## 4.2 Définition d'une mesure sur ce système

$X$  est l'ensemble  $\{(x, y, z) \in \mathcal{X}, P(x, y, z) = 0\}$ . Pour les points de  $X$  où  $\mathcal{D}_x P \neq 0$ , on définit la 2-forme différentielle :

$$\omega = \frac{dy \wedge dz}{\mathcal{D}_x P}.$$

En fait  $\omega$  peut être défini sur  $X$  tout entier ; on utilise l'égalité suivante, pour les points où aucune des différentielles partielles est non nulle :

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= 0 \\ \mathcal{D}_x P dx + \mathcal{D}_y P dy + \mathcal{D}_z P dz &= 0 \\ \mathcal{D}_x P dx \wedge dy + \mathcal{D}_z P dz \wedge dy &= 0 \\ \frac{dx \wedge dy}{\mathcal{D}_z P} &= -\frac{dz \wedge dy}{\mathcal{D}_x P} \end{aligned}$$

Et finalement,

$$\frac{dx \wedge dy}{\mathcal{D}_z P} = \frac{dy \wedge dz}{\mathcal{D}_x P} = \frac{dz \wedge dx}{\mathcal{D}_y P}.$$

Comme les trois dérivées partielles ne sont jamais nulles en même temps, cela permet de définir  $\omega$  sur  $X$  tout entier par la formule appropriée. Elle est lisse et ne s'annule pas sur  $\mathcal{X}$ .

De cette 2-forme différentielle, on en déduit une mesure de Borel sur  $X \subset \mathcal{X}$ .

Cette mesure est  $f$ -invariante et ergodique pour l'action du groupe engendré par les 3 involutions. Pour le montrer, on utilise le même genre de technique que pour le tore (exemple 3.4.3) : la composée de 2 involutions laisse une des coordonnées invariantes, et c'est ce qui fait office de "rotation irrationnelle".

## 5 Etude informatique du système dynamique

Nous souhaiterions maintenant, dans un premier temps, avoir un aperçu graphique des trajectoires du système dynamique que nous venons de définir ; puis de pouvoir conjecturer certains résultats relatifs à la répartition des orbites sur la surface. Enfin, nous allons nous intéresser plus particulièrement à une surface particulière : la surface de Wang.

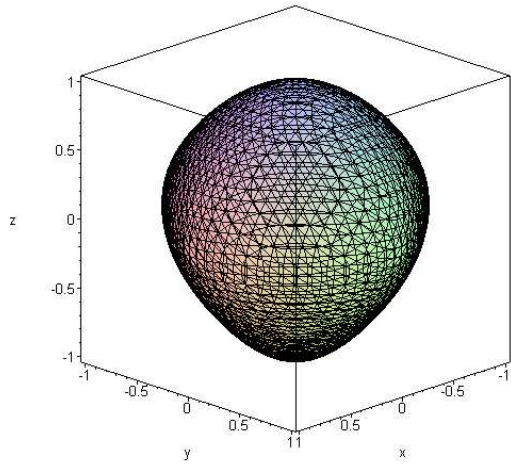
### 5.1 Tour d'horizon des programmes développés

Ce système avait déjà été étudié numériquement par Curtis McMullen, professeur de mathématiques à l'université d'Harvard. Il s'était uniquement intéressé au cas particulier des surfaces :

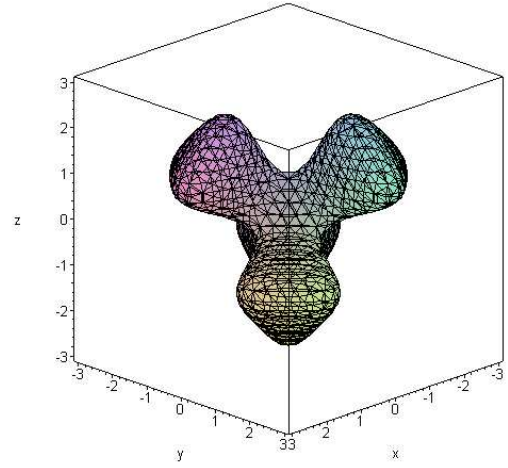
$$\Gamma_{A,B} = \{(x, y, z) \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})^3 \mid (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) + Axyz = B\}$$

toutes "lisses" sur  $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})^3$  pour tout  $A, B \in \mathbb{R}$ .

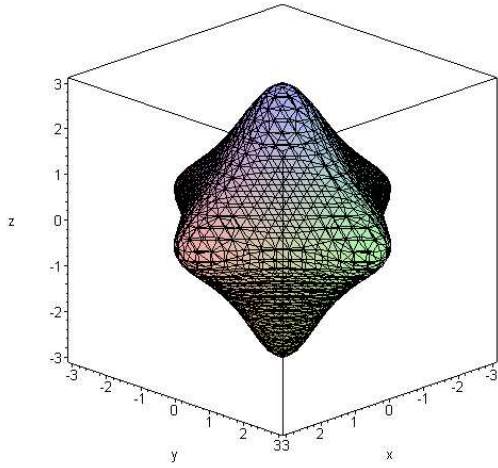
Voici un aperçu de ces surfaces pour différentes valeurs de  $A$  et  $B$  :



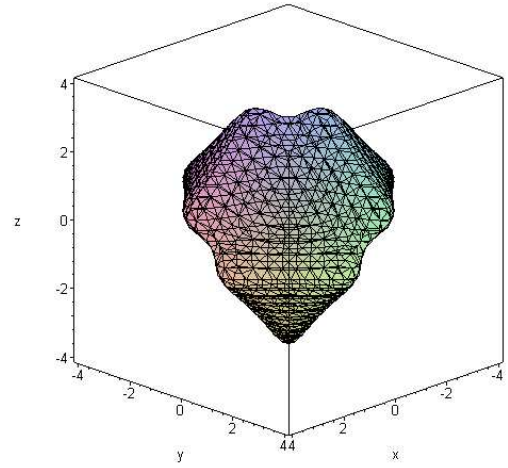
$A = 1, B = 2$



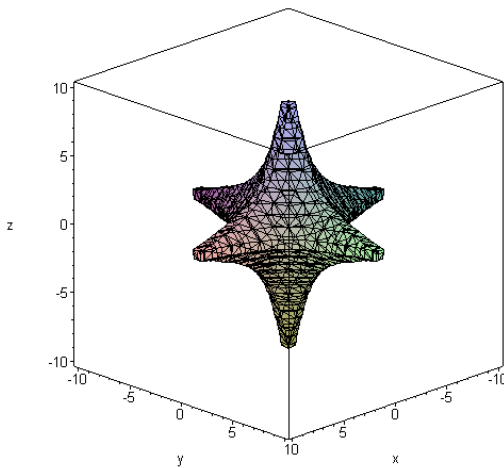
$A = 10, B = 2$



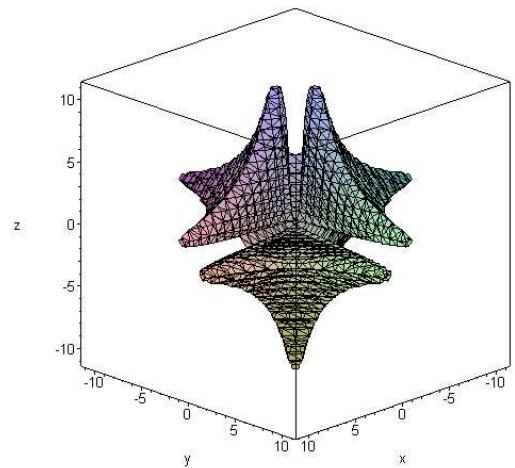
$A = 1, B = 10$



$A = 10, B = 10$



$A = 1, B = 100$



$A = 50, B = 2$

Il a écrit des programmes en C capable de tracer les orbites sur ces surfaces, ainsi que d'étudier la stabilité du point fixe  $(0, 0, 0)$  (commun à ces systèmes pour tout couple de paramètre  $(A, B)$ ) et de dessiner les directions stables. Ces programmes sont disponibles sur :

<http://abel.math.harvard.edu/~ctm/programs.html>

Des exemples de figures obtenues par ces programmes sont visibles sur :

<http://abel.math.harvard.edu/~ctm/gallery/index.html>

Notre premier travail a donc été de réécrire ces programmes pour qu'ils puissent travailler sur n'importe quel polynôme "lisse", mais aussi de pouvoir calculer avec des polynômes à coefficients complexes.

Le langage C a été conservé dans un souci de rapidité d'exécution et d'économie des ressources mémoire, les deux principaux critères qui ont guidé la mise au point de ces programmes. De plus, un soin particulier a été apporté à :

- la clarté et à la réutilisabilité du code, de sorte que des portions puissent resservir dans un autre projet mathématique ;
- la portabilité des programmes : le code est compatible ANSI C, et ils ne dépendent d'aucune librairie extérieure. De plus, ils ont été testés avec succès sous Linux, Solaris ou Windows (via MinGW) ;
- la stabilité globale des programmes, par une gestion rigoureuse des ressources mémoire (ils ont été vérifiés avec Valgrind) ;
- la facilité d'utilisation et de configuration.

Ainsi, il est apparu très vite impossible de continuer à passer les paramètres des programmes via la ligne de commande comme McMullen le faisait : en effet, un polynôme à trois variables et de degré maximum 2 en chaque variable possède 27 coefficients, il aurait donc été fastidieux de tous les spécifier sur une seule ligne, avec tous les risques de faute de frappe que cela comprenait ! Il a donc été décidé d'utiliser des fichiers de configuration. Cependant, cela a nécessité l'écriture d'un parseur qui, même très basique, a pris assez longtemps pour être mis au point.

De plus, le fait de vouloir calculer à la fois avec des réels et des complexes a mené à la réécriture complète du moteur de calcul, qui est dorénavant totalement dissocié des opérations propres au système étudié (involution des racines, ...). Le corps étudié est décrit dans le programme uniquement par ses opérations de base, spécifiées dans des fonctions (addition, multiplication, injection de  $\mathbb{Z}$ , racine carrée...). Des types vecteurs et polynômes ont pu donc être définis indépendamment du corps ; toute cette abstraction pouvant d'ailleurs être reprise dans un autre projet mathématique. Ainsi, le code utilisé au niveau "étude du système dynamique" est identique dans les deux cas, la modification d'un unique paramètre indiquant au moteur sur quel corps il travaille. Les calculs algébriques sur le corps et l'implémentation du système dynamique sont ainsi dans deux couches distinctes. Il serait d'ailleurs tout à fait possible de calculer dans des corps "exotiques" ( $\mathbb{F}_p$ , quaternions), si bien sûr cela a un sens.

Enfin, un encodeur BMP a été rapidement implémenté afin d'écrire nos images dans ce format, alors que les programmes de McMullen utilisaient uniquement le format Post-Script. On obtient ainsi des images plus petites et plus faciles à manipuler, particulièrement lorsqu'il s'agit d'assembler une animation.

## 5.2 TRAJ : dessin des trajectoires

Le programme TRAJ lit dans son fichier de configuration les coefficients d'un polynôme  $P$  vérifiant les hypothèses du système dynamique, un nombre initial de points, une répartition de points dans le plan  $\{z = 0\}$  (soit un unique point, soit une répartition aléatoire, soit une répartition sur une "grille"), et une limite temporelle  $N$ . Chacun des points de la répartition est porté sur la surface (la troisième coordonnée est complétée pour que  $P(x, y, z) = 0$ ), puis le programme calcule  $f^n(x, y, z)$  pour  $n < N$ , projette les itérés dans un plan donné, et affiche l'image obtenue de cette manière.

Ce programme travaille exclusivement dans  $\mathbb{R}$  car on souhaite ici observer les orbites elle-mêmes (dans  $\mathbb{C}$ , il faudrait projeter sur un sous-espace de dimension 2 sur  $\mathbb{C}$ , donc de dimension 4 sur  $\mathbb{R}$ ).

Il est possible de spécifier le plan de projection et les paramètres de la fenêtre de l'image. De plus, il est possible de choisir de ne pas afficher les points des orbites qui se trouvent *derrière* la surface. Ceci peut être obtenu en calculant pour chaque point une permutation supplémentaire sur l'axe orthogonal au plan de projection (prenons ici  $z$  pour fixer les idées) puis en comparant la côte en  $z$  avec celle avant permutation : si elle a diminué, c'est que le point original était sur la face supérieure. Ceci ralentit légèrement l'exécution du programme, puisqu'il est nécessaire de calculer une permutation de plus.

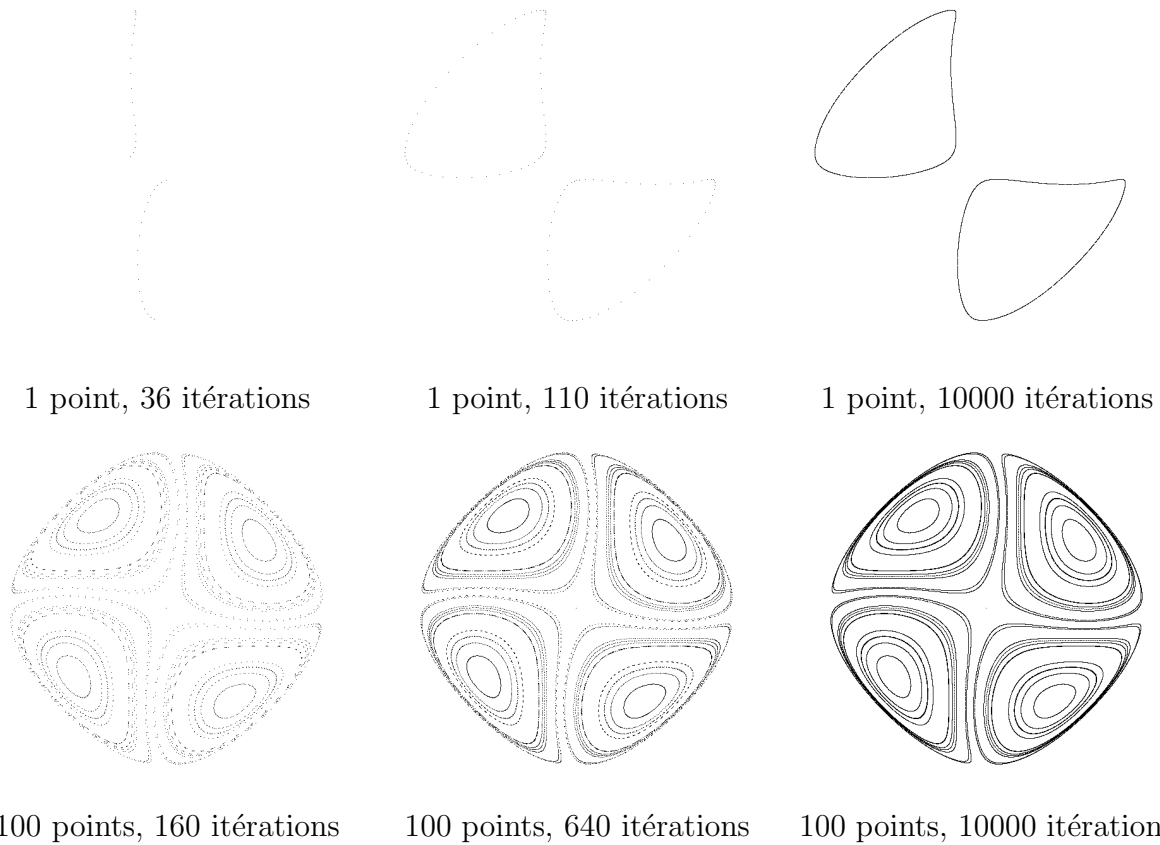
Ainsi, pour calculer  $f(x, y, z)$  (où  $(x, y, z)$  vérifie  $P(x, y, z) = 0$ ), le programme doit :

- déterminer le polynôme  $P(., y, z) \in \mathbb{R}[X]$  et, puisque  $x$  est racine de  $P(., y, z)$  comme polynôme d'une seule variable, calculer la seconde racine  $x'$  (rapide grâce aux relations entre racines et coefficients) ;
- déterminer le polynôme  $P(x', ., z) \in \mathbb{R}[Y]$  et, comme  $y$  est racine de  $P(x', ., z)$ , calculer la seconde racine  $y'$  ;
- déterminer le polynôme  $P(x', y', .) \in \mathbb{R}[Z]$  et, comme  $z$  est racine de  $P(x', y', .)$ , calculer la seconde racine  $z'$ .

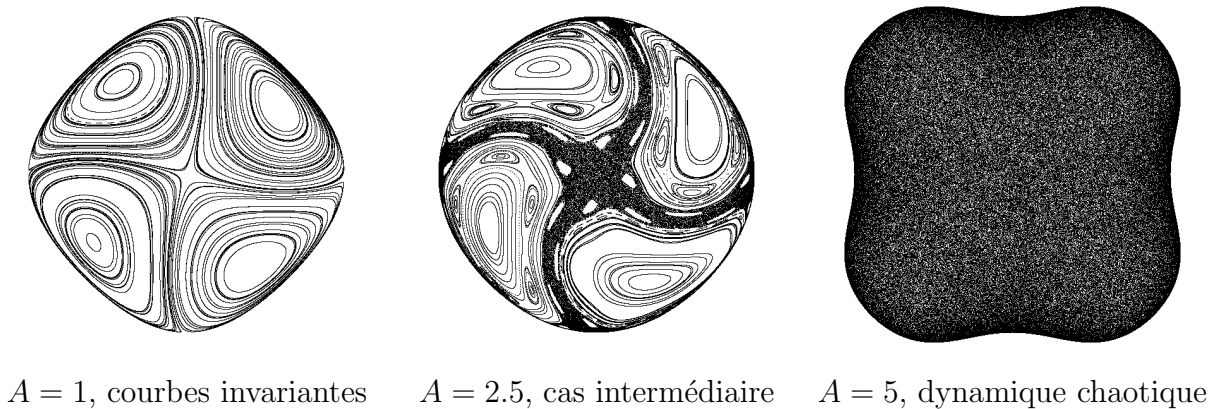
Alors,  $(x', y', z')$  correspond bien à notre définition de  $f(x, y, z)$ .

Le procédé le plus lent est la semi-évaluation de  $P$  en deux coordonnées pour obtenir un polynôme en une seule coordonnée ; comme les valeurs d'évaluation changent à chaque fois, il n'est pas possible de gagner du temps en gardant en mémoire une partie du calcul d'un appel à l'autre de cette fonction. De plus, lors de cette étape il est nécessaire de prendre en considération tous les coefficients du polynôme, et pour chaque monôme calculer  $x^i y^j z^k$ , ce qui est très coûteux malgré le précalcul des puissances  $x^i$ ,  $y^j$  et  $z^k$  au début de l'algorithme. Pour donner une idée, le programme passe 60% du temps sur la fonction réalisant cette opération.

Voici un aperçu du tracé progressif d'orbites pour la surface type  $\Gamma_{1,2}$  de McMullen :



Ces orbites correspondent à des familles de courbes invariantes. Les itérations d'un point donné de la surface restent toutes localisées sur une même courbe. Dans ce cas, la dynamique correspondante est essentiellement celle d'une rotation du plan, ou de  $z \in S^1 \mapsto z^a \in S^1$ . Cependant, la dynamique peut parfois être beaucoup plus riche, avec les itérés des points chaotiquement répartis dans un fermé d'intérieur non vide de la surface. Il existe aussi des cas intermédiaires, où certains points donnent des lacets invariants (nommés "îles"), et d'autres des zones chaotiques. La surface  $\Gamma_{A,B}$  de McMullen nous donne des exemples de chaque cas selon la valeur de  $A$  choisie ( $B = 2$ , 100 points pris au hasard dans  $[-1.2; 1.2]^2$  et itérés 10000 fois) :

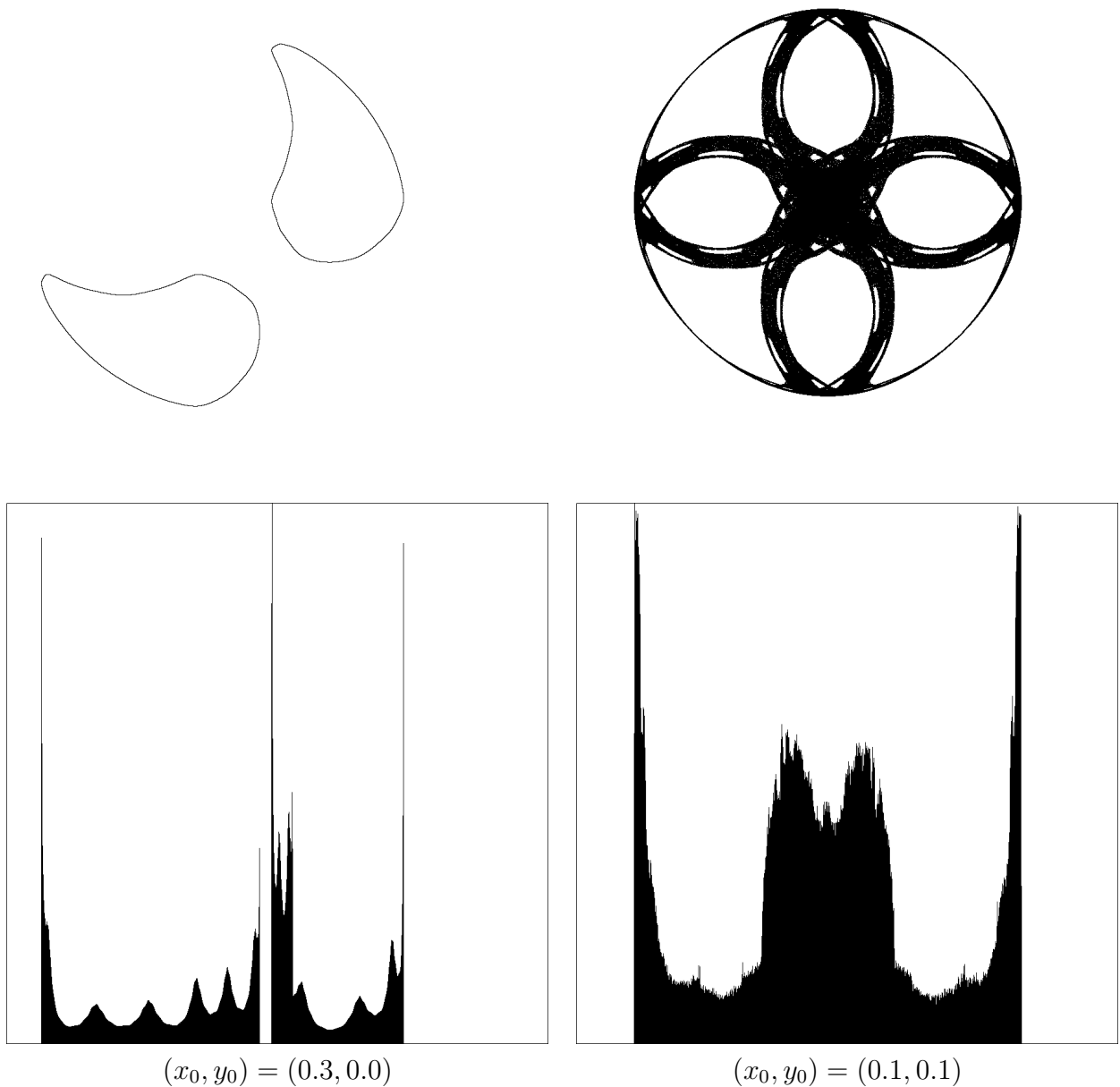


### 5.3 MEASURE : répartition des points

Le second programme est MEASURE. Il se présente sous deux formes, suivant que l'on étudie la dynamique dans  $\mathbb{R}$  ou dans  $\mathbb{C}$ .

MEASURER prend une répartition de points dans  $\mathbb{R}^2$ , calcule les orbites comme dans TRAJ et projette les itérés sur un axe réel (disons  $z$ ). L'image obtenue est un histogramme représentant en abscisse l'axe de projection  $z$ , et en ordonnée le nombre d'itérés qui ont été projetés dans un voisinage de  $z$ .

Reprenons par exemple la surface  $\Gamma_{2.5,2}$ . Certaines orbites, comme celle partant du point  $(0.1, 0.1)$ , ont une dynamique chaotique; tandis que d'autres, comme celle générée par  $(0.3, 0.0)$  sont localisées sur une courbe invariante. Voici le comparatif de l'orbite sur 1000000 itérations (on a superposé le dessous et le dessus de la surface sur la même image) et de l'historgramme de répartition des points produit par MEASURER dans les deux cas :





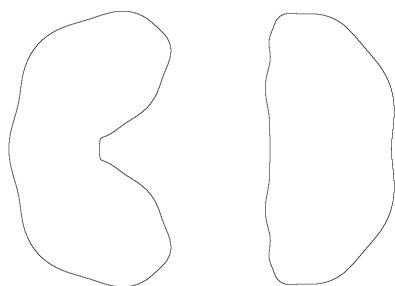
La courbe de gauche présente un histogramme lisse ; on peut donc penser que la mesure  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{f^k(x_0, y_0)}$  converge essentiellement lorsque  $n \rightarrow \infty$  vers la mesure de Lebesgue sur la courbe invariante. A contrario, sur la figure de droite, on constate que l'histogramme est beaucoup plus chaotique, ce qui est caractéristique d'une dynamique chaotique.

MEASUREC prend une répartition de points dans  $\mathbb{C}^2$ , calcule les orbites, et projette les itérés sur un axe complexe  $z$ . L'image obtenue est une carte de l'axe complexe  $z$  (partie réelle en abscisse, partie imaginaire en ordonnée) où en chaque point est représenté le nombre d'itérés qui ont été projetés au voisinage de ce point : plus la couleur est sombre, plus ce nombre est élevé.

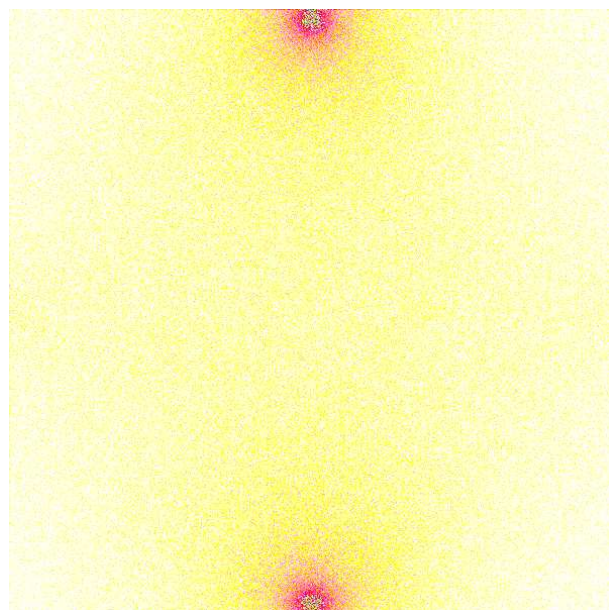
Voici quelques exemples de répartition que l'on peut observer avec  $\Gamma_{A,2}$  :



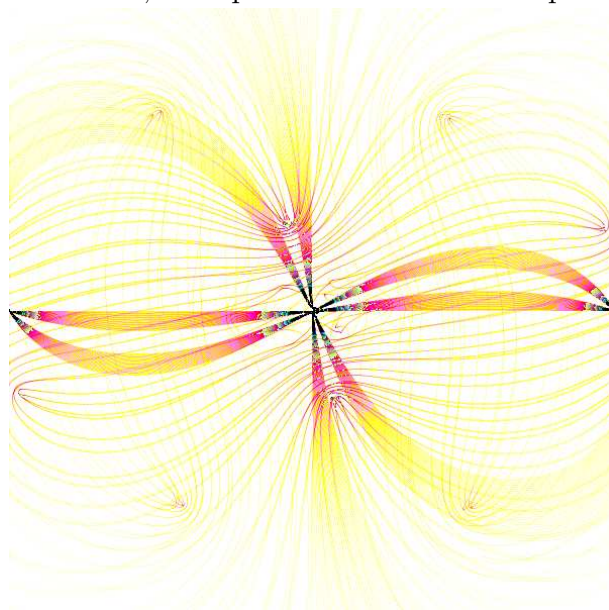
$A = 1.0$ , exemple d'une orbite réelle



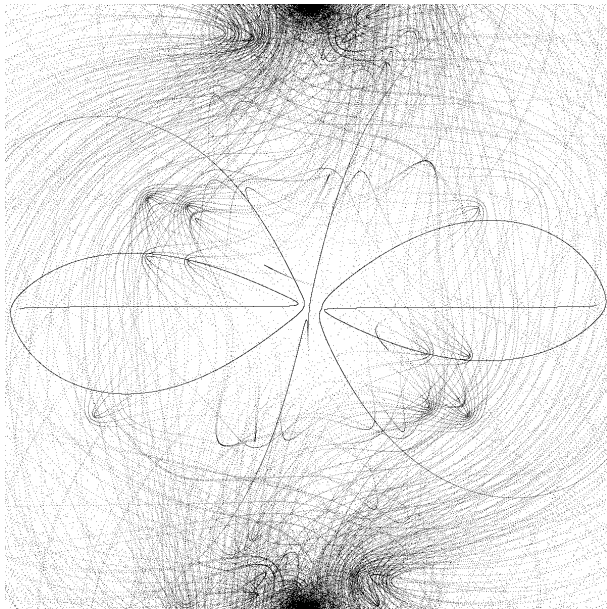
$A = 1.0$ , exemple d'une courbe invariante dans  $\mathbb{C}^3$



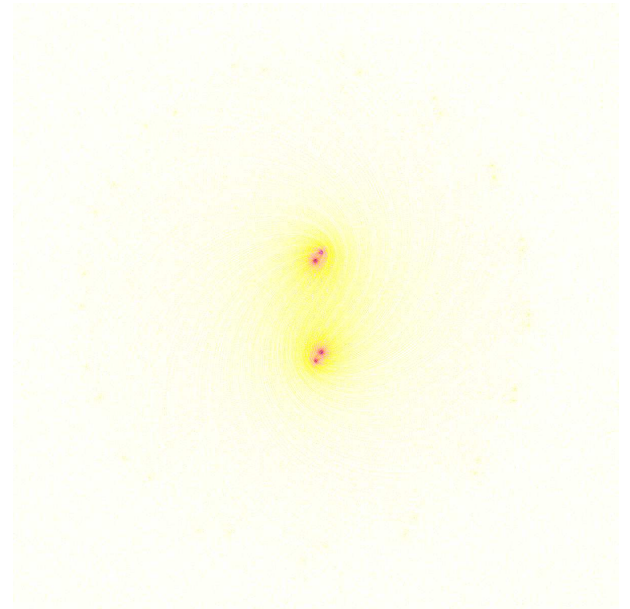
$A = 1.0$ , exemple d'une orbite chaotique



$A = 0.1$ , trajectoire complexe



$A = 0.1$ , autre trajectoire complexe



$A = 2.216$ , exemple d'une orbite fractale

Ce programme permet à la fois d'observer les trajectoires dans  $\mathbb{C}^3$  et de visualiser la répartition des points sur les orbites. Ainsi, on retrouve toutes les répartitions de points du réel, mais aussi d'autres beaucoup plus variées. Il permet entre autres de déterminer si une "île" dans le réel a une épaisseur dans le complexe ; i.e. si on prend point réel dans une île et qu'on lui ajoute un complexe de module petit, de voir s'il va lui aussi générer une courbe invariante dans  $\mathbb{C}^3$ .

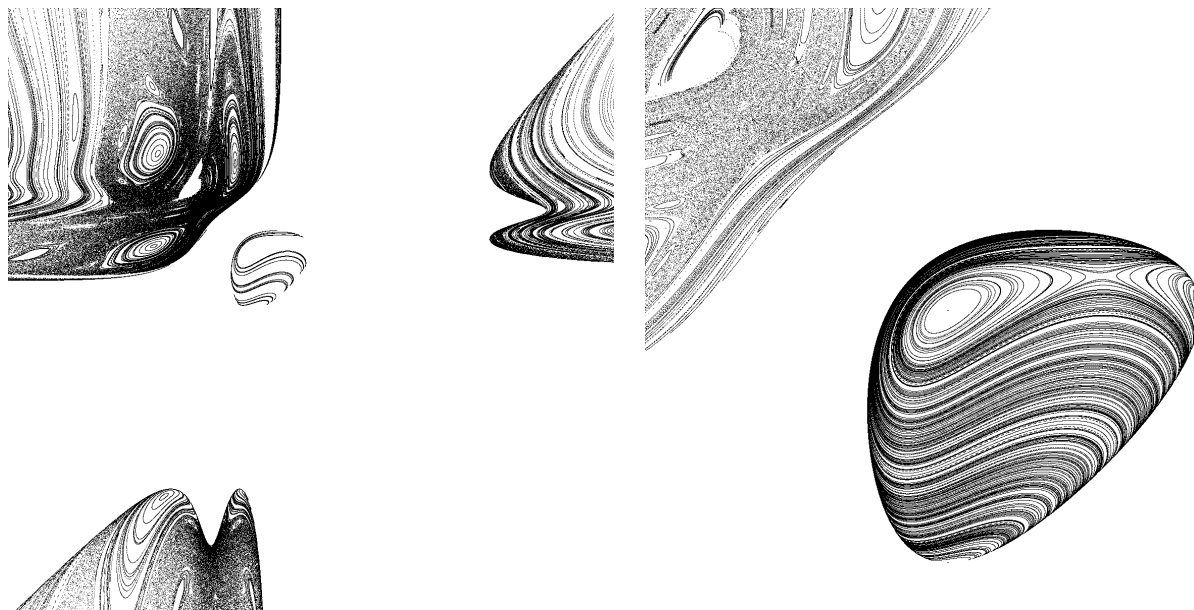
## 5.4 La surface de Wang

Cette surface est définie par le polynôme (lisse) suivant :

$$W_\epsilon = \{(x, y, z) \in \mathbf{P}^1(\mathbb{C})^3 \mid x^2 y^2 z^2 + x^2(y+z) + y^2(x+z) + z^2(x+y) + xyz + x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) = \epsilon\}$$

Elle a été introduite dans le but de répondre au problème suivant : existe-t-il des surfaces  $\mathbb{K}^3$  ayant plusieurs composantes connexes, et sur lesquelles la dynamique diffère suivant la composante connexe ?

La surface de Wang possède quatre composantes connexes, dont une seule est bornée. Il a été conjecturé que, dans le cas de  $W_0$ , la dynamique sur toutes les composantes connexes non bornées est chaotique, tandis que la dynamique sur la composante bornée est du type courbes invariantes.



Vue d'ensemble des quatre composantes

Zoom sur la composante bornée

On ne sait toujours pas si la surface de Wang répond effectivement au problème, ni même s'il existe une solution. Cependant, l'étude graphique de cette surface donne de bonnes raisons de croire qu'elle convient. En effet, dès que  $\epsilon$  devient positif, on voit apparaître des orbites chaotiques sur la composante centrale.

Ce problème possède un analogue résolu : on sait qu'il existe des surfaces à plusieurs composantes connexes dont certaines n'ont aucun point rationnel tandis qu'ils sont denses sur les autres. C'est le cas de :

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t(x^2 + y^2) = (4z - 7t)(z^2 - 2t^2)\}$$

## Références

- [1] A. KATOK, B. HASSELBLATT - *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [2] M. BRIN, G. STUCK - *Introduction to dynamical systems*. Cambridge University Press, 2002.
- [3] C. MCMULLEN - *Trajectories on a K3 surface*. Disponible sur <http://abel.math.harvard.edu/ctm/programs.html>. 2001.