

---

# UN APERÇU COMPRÉHENSIBLE DE MA THÈSE

*par*

Mickaël Crampon

---

## 1. Perceptions

J'aimerais présenter ici ma propre approche de mon travail. Le problème général est celui de la perception. Dans la vie réelle, on perçoit des objets, en les voyant, en les touchant ; ils ont une forme. Mais existent-ils en dehors de notre propre perception ? Et les autres les perçoivent-ils de la même façon ? On peut voir ici deux grands problèmes :

- si l'objet existe en tant que tel, on peut le définir par une définition abstraite et consistante ;
- un objet étant abstraitement défini, quelles sont les différentes perceptions qu'on peut en avoir, quelles sont ses diverses représentations ?

Il est assez drôle de se rendre compte que, souvent, les définitions abstraites que l'on donne d'un objet en mathématiques reposent sur une certaine perception que l'on en a. Cela pousserait à penser qu'on ne peut donner d'existence propre à un objet...

Les objets que j'étudie sont des *variétés* : ce sont des espaces qui ressemblent localement à l'espace réel  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n$ , que l'on peut définir algébriquement. La subtilité est bien dans le "ressemblent". Ici, on veut dire que l'espace est localement difféomorphe à une partie de  $\mathbb{R}^n$ . Remarquez qu'une fois défini un objet, il n'est pas toujours facile de montrer qu'un tel objet existe, en construisant "explicitement" un objet qui satisfasse à la définition. Souvent, c'est en trouvant une représentation géométrique de l'objet supposé exister que l'on montrera qu'il en existe.

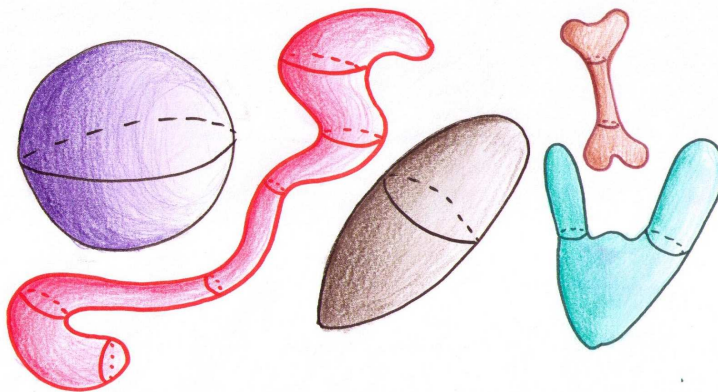


FIGURE 1. Plusieurs représentations de la surface *sphère*

Prenons un exemple. On peut définir abstraitement ce qu'est une sphère, en tant que variété de dimension 2, c'est-à-dire une surface. Bien sûr, une des représentations géométriques de cette surface *sphère* est la sphère à laquelle on pense, la sphère ronde, la surface d'un ballon. Il s'agit d'une représentation dans notre monde réel, l'espace réel  $\mathbb{R}^3$  en 3 dimensions. Or, cette représentation géométrique, on peut la déformer : par exemple, en imaginant que le ballon est disons, plein d'eau, on voit qu'on peut pousser et tirer un peu dans tous les sens pour obtenir un objet qui apparaît *différent*. Ce qui est important, c'est qu'en tant que surface, il s'agit toujours d'une sphère ; par contre, on a changé sa représentation géométrique dans l'espace  $\mathbb{R}^3$ .

Mon travail, c'est précisément d'étudier différentes représentations géométriques qu'on a d'un même objet, et d'essayer de les comparer. Bien sûr, il faut encore définir ce que l'on entend par représentation géométrique avant de pouvoir en dire quelque chose.

## 2. Géométrie hyperbolique et géométries de Hilbert

L'objet que j'étudie est donc une variété lisse  $M$ . Une des représentations géométriques de  $M$  qui m'intéresse, c'est d'abord une représentation de  $M$  en tant que variété hyperbolique. Dans cette représentation, la variété ressemble localement à l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ , elle apparaît comme un quotient  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  de l'espace hyperbolique ; dit d'une autre façon, il s'agit de munir  $M$  d'une métrique riemannienne de courbure  $-1$ .

Le modèle de Beltrami de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$  est l'espace métrique  $(\Omega_0, d_{\Omega_0})$  où

- $\Omega_0$  est une boule ouverte de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  ;
- la distance  $d_{\Omega_0}(x, y)$  entre deux points  $x$  et  $y$  de  $\Omega_0$  vaut :

$$d_{\Omega_0}(x, y) = \frac{1}{2} \log[a, b, x, y] = \frac{1}{2} \log \frac{|ax| |by|}{|ay| |bx|},$$

où  $a$  et  $b$  sont les deux points d'intersection de la droite  $(xy)$  avec le bord de  $\Omega_0$ .

L'espace hyperbolique est un espace homogène : son groupe d'isométries est transitif. Autrement dit, l'espace est identique en tout point. Du coup, sur une variété hyperbolique  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ , on ne peut pas savoir où l'on se trouve en regardant juste autour de nous.

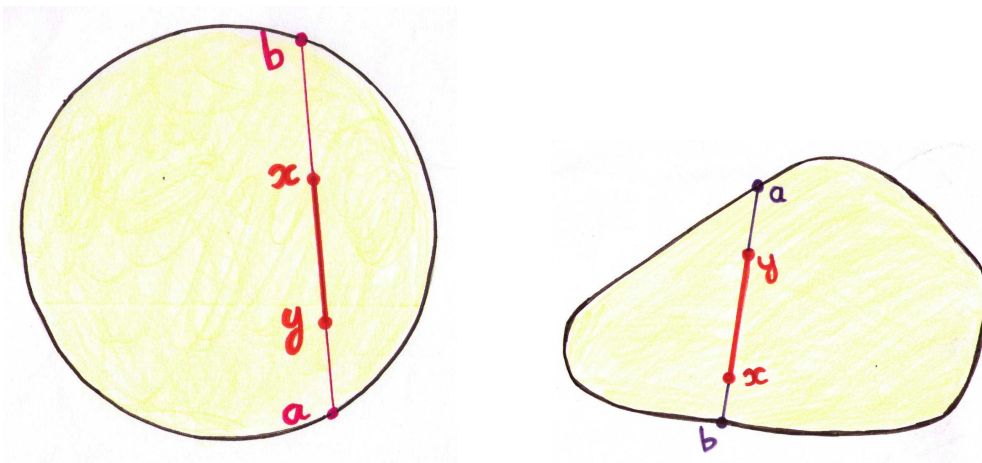


FIGURE 2. Distances de Beltrami et de Hilbert

L'exemple à avoir en tête est celui d'une surface de genre  $g \geq 2$ , qu'il est possible de munir d'une structure hyperbolique. Maintenant, comme on l'a fait pour la sphère, on peut parfois déformer cette structure géométrique. On pourrait par exemple faire varier la courbure (c'est ce qu'on a fait dans l'exemple de la sphère) mais on peut aussi sortir du monde riemannien.

Dans mon travail, je vois la géométrie hyperbolique, via le modèle de Beltrami, comme un exemple particulier de géométrie de Hilbert. Une géométrie de Hilbert est en effet un espace métrique  $(\Omega, d_\Omega)$  où

- $\Omega$  est un ouvert convexe borné de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  ;
- la distance  $d_\Omega(x, y)$  entre deux points  $x$  et  $y$  de  $\Omega$  est définie comme dans le modèle de Beltrami :

$$d_\Omega(x, y) = \frac{1}{2} \log[a, b, x, y],$$

où  $a$  et  $b$  sont les deux points d'intersection de la droite  $(xy)$  avec le bord de  $\Omega$ .

Cet espace n'est cette fois pas riemannien, mais c'est un espace de Finsler : la métrique n'est pas engendrée par un champ de produits scalaires, mais par un champ de normes ; la norme d'un vecteur  $\xi$  tangent à  $\Omega$  en  $x$  est donnée par

$$F(x, \xi) = \frac{|\xi|}{2} \left( \frac{1}{|xx^+|} + \frac{1}{|xx^-|} \right),$$

où  $x^-$  et  $x^+$  sont les deux points d'intersection de la droite  $x + \mathbb{R}\xi$  avec le bord du convexe. D'autre part, une géométrie de Hilbert est la plupart du temps non homogène, son groupe d'isométries pouvant être compact, ou même fini. Bien sûr, on retrouve la géométrie hyperbolique lorsque  $\Omega$  est une boule, ou plus généralement un ellipsoïde, par invariance projective de la métrique.

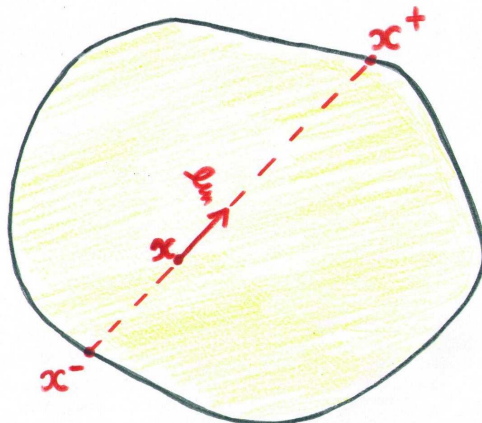


FIGURE 3. Métrique de Finsler

Ce que l'on veut étudier maintenant, c'est les différentes représentations géométriques d'une même variété  $M$  comme quotients de géométries de Hilbert  $M = \Omega/\Gamma$ . En particulier, on aimerait voir ce qu'a de particulier le cas riemannien hyperbolique parmi toutes les représentations possibles. On va faire une restriction en ne considérant que les géométries de Hilbert définies par un ouvert strictement convexe à bord  $C^1$ . On voudrait en effet que notre géométrie de base exhibe quelques propriétés de type hyperbolique, et ce sont des hypothèses que l'on est alors naturellement amené à faire ; elles sont toutefois assez souples pour que des comportements intéressants puissent apparaître.

### 3. Le flot géodésique

Il y a plusieurs façons de comparer les différentes représentations géométriques d'une variété donnée. Moi, je m'intéresse à la façon dont on peut se déplacer dans ces géométries, en étudiant son flot géodésique.

Un segment géodésique de  $(\Omega, d_\Omega)$  est un chemin optimal entre deux points, au sens où la longueur du chemin vaut exactement la distance entre ses points extrémaux. Il s'avère qu'entre deux points de  $(\Omega, d_\Omega)$ , le chemin le plus court est précisément le segment de ligne droite entre ces deux points. Les géodésiques sont donc les droites, parcourues à vitesse (finslérienne) 1.

Ainsi, si l'on se donne un couple  $w = (x, [\xi])$  formé d'un point  $x \in \Omega$  et une direction  $[\xi]$ , il y a une unique géodésique partant de  $x$  dans la direction  $[\xi]$ . On peut alors définir le flot géodésique

$$\begin{aligned} \varphi^t : HM &\longrightarrow HM \\ (x, [\xi]) &\longmapsto (x_t, [\xi_t]), \end{aligned}$$

pour toute variété quotient  $M = \Omega/\Gamma$  : on obtient  $(x_t, [\xi_t])$  en suivant la géodésique partant de  $x$  dans la direction  $[\xi]$  pendant le temps  $t$  ; pour  $\Omega$ , il s'agit simplement de suivre les droites... Le premier but, c'est de comparer les propriétés de  $\varphi^t$  lorsque la géométrie est hyperbolique et lorsqu'elle ne l'est pas.

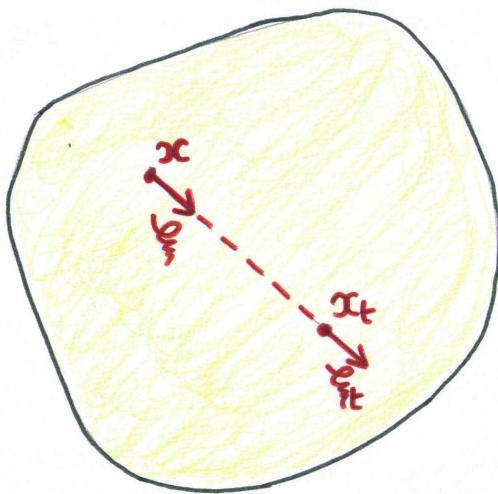


FIGURE 4. Le flot géodésique :  $x_t$  est tel que  $d_\Omega(x, x_t) = t$

Il y a deux types de questions, locale et globale. D'un côté, on peut choisir une orbite en particulier et regarder comment le flot se comporte autour de cette orbite. D'un autre côté, on peut s'intéresser au mouvement global de tous les points en même temps, ce qui est surtout intéressant lorsque la variété  $M$  n'est pas "trop grosse" : ainsi, les points vont "se mélanger"...

#### 4. Propriétés locales

On considère ici un point  $w = (x, [\xi]) \in H\Omega$  en particulier, et on veut comprendre ce qu'il se passe autour de son orbite  $\{\varphi^t(w), t \in \mathbb{R}\}$ , en temps court et en temps long. Pour cela, on regarde comment le flot contracte ou augmente les distances autour de l'orbite en regardant comment évolue, avec le temps  $t$ , les normes  $\|d\varphi^t Z\|$ , pour des vecteurs  $Z$  tangents à  $H\Omega$  en  $w$ . Ici, la norme  $\|\cdot\|$  est une norme de Finsler sur  $H\Omega$ , définie de façon naturelle via la métrique de Finsler  $F$  sur  $\Omega$  ; ainsi, les distances sur  $H\Omega$  sont naturellement associées aux distances sur  $\Omega$ .

L'observation principale est la suivante : le fibré tangent admet une décomposition en

$$TH\Omega = \mathbb{R}X \oplus E^s \oplus E^u,$$

décomposition qui est invariante par le flot et telle que

- $X$  est le générateur du flot géodésique ;
- la fonction  $t \mapsto \|d\varphi^t Z^s\|$  est strictement décroissante de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, +\infty[$ , pour  $Z^s \in E^s$  ;
- la fonction  $t \mapsto \|d\varphi^t Z^u\|$  est strictement croissante de  $\mathbb{R}$  dans  $]0, +\infty[$  pour  $Z^u \in E^u$ .

On a donc le comportement suivant : autour de l'orbite du point  $w$ , il y a deux autres directions "transverses",  $E^s$  et  $E^u$ , le long desquelles le flot contracte et dilate les distances. Autrement dit,

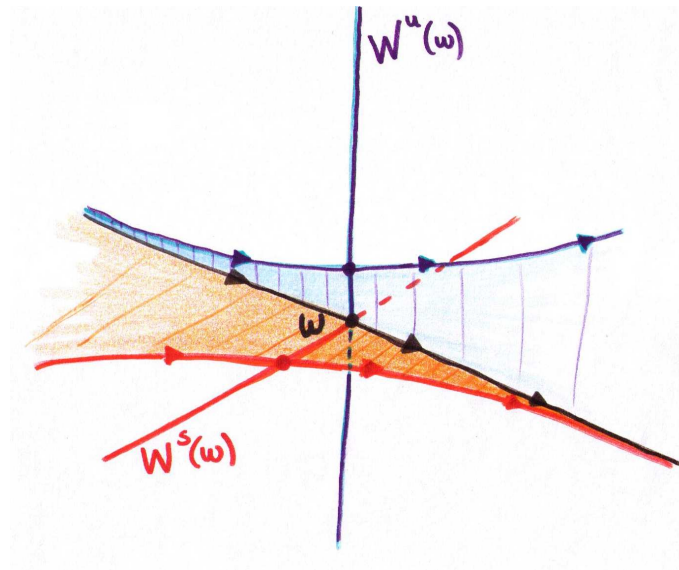


FIGURE 5. Comportement local

il y a une famille d'orbites qui se rapproche infiniment de celle de  $w$ , et d'autres orbites qui s'en éloignent (c.f. figure 4). C'est pour cela qu'on appelle la distribution  $E^s$  la distribution stable et  $E^u$  la distribution instable.

On voudrait maintenant quantifier ces contractions et dilatations de distances, au moins asymptotiquement, c'est-à-dire en temps long. La première chose, c'est de voir dans quels cas ces phénomènes sont de type exponentiel.

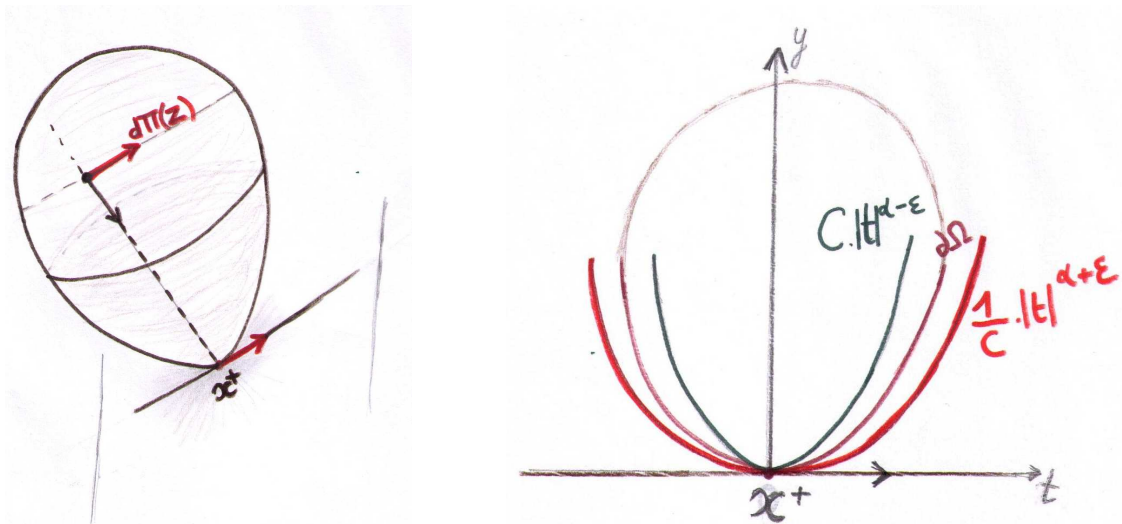


FIGURE 6.

En fait, cette propriété de contraction ou dilatation exponentielle se lit sur la forme locale du bord  $\partial\Omega$  au point  $x^+$  à l'extrémité de l'orbite qu'on considère. Dans ma thèse, j'énonce un résultat précis à ce propos, mais il est suffisant de l'illustrer par un exemple simple. Tout d'abord, comme la géométrie est plate (essentiellement, le fait que les géodésiques soient des droites), on peut se restreindre au cas de la dimension 2. Dans ce cas, supposons que pour

un certain  $1 \leq \alpha \leq +\infty$  et tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\partial\Omega$  soit  $C^{\alpha-\varepsilon}$  et  $\alpha + \varepsilon$ -convexe en  $x^+$  ; alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d\varphi^t Z^s\| = -2 + \frac{2}{\alpha} \quad \text{pour } Z^s \in E^s,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|d\varphi^t Z^u\| = \frac{2}{\alpha} \quad \text{pour } Z^u \in E^u.$$

L'hypothèse que  $\partial\Omega$  soit  $C^{\alpha-\varepsilon}$  et  $\alpha + \varepsilon$ -convexe en  $x^+$  pour tout  $\varepsilon > 0$  veut juste dire (c.f. figure 4) qu'il existe des constantes  $C_\varepsilon$  telles que le graphe  $f$  de  $\partial\Omega$  en  $x^+$  satisfait

$$\frac{1}{C} |t|^{\alpha+\varepsilon} \leq f(t) \leq C |t|^{\alpha-\varepsilon}$$

pour tout  $t$  assez petit (ceci dépendant de  $\varepsilon$ ).

## 5. Comportement global

**5.1. Variétés compactes.** — En ayant compris ce qu'il se passait localement, il est alors facile de montrer que le flot géodésique d'un quotient compact  $M = \Omega/\Gamma$  est un flot d'Anosov : contractions et dilatations des distances sont exponentielles, et le taux exponentiel est contrôlé. C'est le théorème suivant, dû à Yves Benoist :

**Théorème (Yves Benoist).** — *Supposons que  $M = \Omega/\Gamma$  soit compacte. Alors le flot géodésique sur  $HM$  est un flot d'Anosov de décomposition*

$$THM = \mathbb{R}.X \oplus E^s \oplus E^u;$$

*c'est-à-dire qu'il existe des constantes  $C, \alpha, \beta > 0$  telles que pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$\|d\varphi^t(Z^s)\| \leq C e^{-\alpha t} \|Z^s\|, \quad Z^s \in E^s,$$

$$\|d\varphi^{-t}(Z^u)\| \leq C e^{-\beta t} \|Z^u\|, \quad Z^u \in E^u.$$

Le caractère Anosov est une propriété importante du flot géodésique d'une métrique hyperbolique, et notre flot plus général partage donc cette propriété. Il y a toutefois d'autres propriétés qui sont caractéristiques du flot hyperbolique.

Un des résultats principaux de ma thèse dit justement que l'entropie topologique du flot est maximale lorsque la structure est hyperbolique. L'entropie topologique est un invariant fondamental en systèmes dynamiques, qui mesure comment le système sépare les points, à quel point il est chaotique ; c'est en gros une mesure du désordre que crée le système. Un flot d'Anosov est typiquement un système chaotique.

De plus, dans le cas d'un flot géodésique d'Anosov, l'entropie topologique est relié à des propriétés géométriques. Par exemple, elle apparaît naturellement dans le comptage des géodésiques fermées primitives<sup>(1)</sup> : si  $N(T)$  est le nombre de géodésiques fermées primitives de longueur plus petite que  $T$  alors

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \log N(T) = h_{top}.$$

Le théorème se formule de la façon suivante :

**Théorème 5.1.** — *Supposons que  $M = \Omega/\Gamma$  soit compacte. Alors l'entropie topologique  $h_{top}$  du flot géodésique sur  $HM$  est inférieure à  $n - 1$ , avec égalité si et seulement si  $M$  est riemannienne hyperbolique.*

Il s'avère, en fait, que la nature riemannienne d'un quotient compact  $M = \Omega/\Gamma$  peut se lire à travers de nombreuses caractéristiques, certaines d'entre elles faisant intervenir les propriétés dynamiques du flot géodésique. Elles sont résumées dans le corollaire suivant.

**Corollaire 5.2 (Yves Benoist, M.C).** — *Supposons que  $M = \Omega/\Gamma$  soit compacte. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. primitive veut dire qu'on ne considère que les géodésiques qui ne font qu'un tour.



1.  $M$  est riemannienne hyperbolique ;
2. le bord  $\partial\Omega$  est  $C^{1+\epsilon}$  pour tout  $0 < \epsilon < 1$  ;
3. le groupe  $\Gamma$  est Zariski-dense dans  $SL(n+1, \mathbb{R})$  ;
4. le transport parallèle le long des géodésiques sur  $\Omega$  est une isométrie ;
5. les exposants de Lyapunov de  $\varphi^t$  sont  $-1$ ,  $0$  et  $1$  ;
6. le flot géodésique  $\varphi^t$  admet une mesure invariante absolument continue ;
7. l'entropie topologique du flot géodésique vaut  $n-1$ .

Ainsi, c'est une propriété très forte que d'être hyperbolique, puisque cela a des conséquences importantes sur le comportement d'autres objets, comme par exemple le flot géodésique. Dans la suite de ma thèse, j'ai essayé de comprendre ce qui pouvait être dit sur les quotients non compacts. Un théorème aussi fort ne peut toutefois pas être espéré comme on va maintenant l'expliquer.

**5.2. Variétés non compactes.** — Lorsqu'on parle du comportement global du flot géodésique, c'est en fait de ses propriétés de récurrence que l'on veut parler. Les points importants sont donc ceux qui reviennent infiniment souvent près de leur position d'origine, dans la passé et le futur. L'ensemble de ces points s'appelle l'ensemble non errant du flot ; c'est un sous-ensemble fermé de  $HM$ .

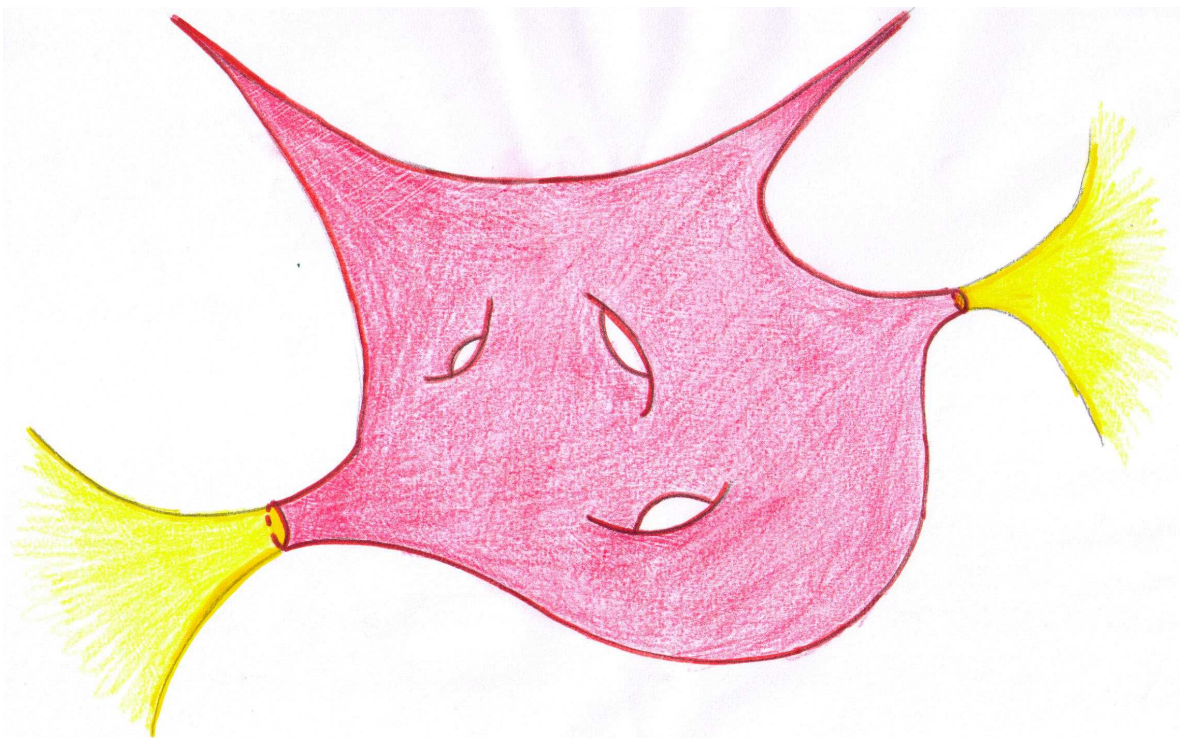


FIGURE 7. Le cœur convexe d'une surface géométriquement finie

Dans le cas d'un quotient compact  $M = \Omega/\Gamma$ , tous les points sont récurrents et l'ensemble non errant est  $HM$  tout entier ; mais en général, ce n'est qu'une petite partie  $N$  de  $HM$ , dont la projection  $\pi(N)$  sur  $M$  est contenue dans une partie propre de  $M$ , qu'on appelle le cœur convexe de  $M$ . Ainsi, on ne peut espérer déduire toute la géométrie de la variété des seules propriétés de récurrence du flot géodésique comme dans le théorème 5.2. Néanmoins, on peut espérer dire quelque chose sur la géométrie du cœur convexe.

Cela amène plusieurs problèmes :

- d’un côté, comprendre la géométrie des quotients non compacts d’une géométrie de Hilbert  $(\Omega, d_\Omega)$  donnée ;
- de l’autre, développer des outils pour étudier leur flot géodésique, en s’inspirant du cas compact.

Ces deux problèmes doivent être étudiés en parallèle, le premier fournissant des exemples auxquels pourraient être appliqués des résultats dynamiques.

*5.2.1. Résultats généraux concernant la dynamique.* — Même si la variété n’est pas compacte, le flot géodésique peut malgré tout admettre des mesures de probabilité invariantes qui sont intéressantes ; d’un point de vue mesurable, l’espace apparaît donc comme un espace “fini”. Par mesure *intéressante*, on veut dire une mesure qui permette de décrire certaines propriétés de récurrence du flot. Pour les flots d’Anosov topologiquement mélangeants, comme le flot géodésique d’un quotient compact, la mesure de Bowen-Margulis est *la* mesure associée à l’entropie topologique : c’est l’unique mesure qui réalise le supremum dans le principe variationnel :

$$h_{top} = \sup\{h_\mu, \mu \text{ probabilité invariante}\}.$$

L’entropie  $h_\mu$  d’une probabilité invariante  $\mu$  est encore une mesure de la complexité du système, mais cette fois d’un point de vue mesurable : les “tailles” des sous-parties de l’espace ne sont plus mesurées par des distances, mais par la mesure  $\mu$  que l’on considère. Le principe variationnel affirme que le système est toujours “plus chaotique” d’un point de vue topologique et, lorsqu’il existe une mesure d’entropie maximale, c’est-à-dire une mesure qui réalise le supremum, alors on peut dire que cette mesure est adaptée à décrire le comportement topologique du flot. Même lorsqu’une telle mesure existe, il n’est pas toujours facile d’en comprendre ses propriétés. En particulier, on peut trouver étonnant qu’elle ne soit pas forcément absolument continue (par rapport à un certain volume sur l’espace considéré), et même ce dans des cas où il existe un volume invariant. Par exemple, pour le flot géodésique d’une métrique à courbure négative sur une surface, la mesure de Bowen-Margulis n’est pas absolument continue, sauf si la courbure est constante.

La mesure de Bowen-Margulis, pour le flot géodésique d’une variété riemannienne compacte à courbure négative, peut être construite de plusieurs façons. En particulier, il existe une construction basée sur les mesures de Patterson-Sullivan, qui sont des mesures  $(\mu_x)_{x \in \Omega}$  sur le bord à l’infini de la variété. Cela marche aussi pour nos géométries et pour un quotient non compact  $M = \Omega/\Gamma$ , cela donne une façon de définir des mesures intéressantes sur  $HM$ . Par contre, il peut se passer deux choses désagréables : d’abord, la mesure que l’on récupère peut être de masse totale infinie ; ensuite, il peut y avoir plusieurs familles de mesures de Patterson-Sullivan, et ainsi plusieurs mesures de Bowen-Margulis.

Toutefois, dans les cas où on arrive à récupérer ainsi une mesure de probabilité (ou finie, ce qui revient au même en normalisant), les mesures de Patterson-Sullivan sont uniquement définies, et il existe donc une unique mesure de Bowen-Margulis, qui est de plus ergodique. Sous cette hypothèse, on a le théorème suivant.

**Théorème 5.3.** — *Soit  $M = \Omega/\Gamma$  une variété quotient. Si*

1. *il existe une mesure de Bowen-Margulis  $\mu_{BM}$  sur  $HM$  qui soit une probabilité ;*
2. *le flot géodésique n’a pas d’exposant de Lyapunov nul sur l’ensemble non errant ;*

*alors  $\mu_{BM}$  est l’unique mesure d’entropie maximale et*

$$h_{top} = h_{\mu_{BM}} = \delta_\Gamma.$$

Dans ce dernier énoncé,  $\delta_\Gamma$  représente l’exposant critique du groupe  $\Gamma$  agissant sur  $(\Omega, d_\Omega)$ , défini par

$$\delta_\Gamma = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \text{card}\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \cdot o \in B(o, R)\};$$

il intervient dans la définition des mesures de Patterson-Sullivan.



Maintenant qu'on a cette mesure d'entropie maximale, on aimerait pouvoir calculer ou au moins estimer son entropie. L'inégalité de Ruelle est un premier pas dans cette direction. C'est un résultat général pour les systèmes dynamiques sur un espace compact, que j'ai utilisé pour prouver l'inégalité dans le théorème 5.1. Cette inégalité fait le lien entre l'entropie d'une mesure et la somme  $\chi^+$  des exposants de Lyapunov positifs, qui mesure l'effet asymptotique du flot sur les volumes dans les variétés instables :

$$\chi^+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \det d\varphi^t|_{E^u}.$$

L'égalité dans le théorème 5.1 se déduit du cas d'égalité dans cette inégalité, qui a été clarifié par Ledrappier and Young. On peut étendre ces deux résultats à notre contexte, au moins lorsque la géométrie de Hilbert sous-jacente est *Gromov-hyperbolique*.

**Théorème 5.4.** — *Soit  $(\Omega, d_\Omega)$  une géométrie de Hilbert Gromov-hyperbolique et  $M = \Omega/\Gamma$  une variété quotient. Pour toute mesure de probabilité  $m$  invariante par le flot, on a*

$$h_m \leq \int \chi^+ dm,$$

*avec égalité si et seulement si  $m$  a ses mesures conditionnelles instables absolument continues.*

**5.2.2. Surfaces géométriquement finies.** — Peu d'exemples de quotients non compacts de géométries de Hilbert sont connus. J'ai commencé et je continue à travailler sur ce problème avec Ludovic Marquis. Dans ma thèse, j'explique le cas des surfaces comme premier exemple, en m'appuyant sur les travaux précédents de Ludovic. La plupart des résultats obtenus sont inspirés de la géométrie hyperbolique ou de courbure négative.

En courbure négative, les exemples les plus simples de variétés non compactes sont les variétés géométriquement finies. Leur définition s'étend sans changement au contexte des géométries de Hilbert, mais le plus important et le plus difficile est de bien comprendre leurs propriétés à l'infini. En effet, en courbure négative, on sait que c'est la géométrie asymptotique dans les parties cuspidales de la variété qui est cruciale.

Les géométries de Hilbert sont des géométries plus rigides que les géométries à courbure négative et on peut donc espérer contrôler la géométrie dans les cusps. Nous n'avons pas encore de résultats généraux, mais nous espérons montrer que la géométrie dans les cusps est asymptotiquement hyperbolique : assez loin dans un cusp, la métrique de Hilbert est aussi proche que l'on veut d'une métrique hyperbolique, au sens où elles sont bi-Lipschitz équivalentes.



FIGURE 8. Une surface géométriquement finie

Pour prouver un tel résultat, il faut comprendre les sous-groupes paraboliques des géométries de Hilbert, le groupe fondamental d'un cusp étant représenté par un groupe parabolique. C'est très simple en dimension 2, car les isométries des géométries de Hilbert planes sont classifiées et

comprises en termes de représentations matricielles.

On peut obtenir alors une description simple et précise des surfaces géométriquement finies, que l'on pense pouvoir étendre en toute dimension. C'est l'énoncé suivant. Rappelons que le cœur convexe  $C(M)$  de la variété  $M = \Omega/\Gamma$  est la partie la plus importante de la variété pour nous, parce que c'est elle qui est le support de l'ensemble non errant.

**Théorème 5.5.** — *Soit  $M = \Omega/\Gamma$  une surface géométriquement finie. Pour tout  $C > 1$ , on peut décomposer le cœur convexe  $C(M)$  de  $M$  en*

$$C(M) = K \sqcup \bigsqcup_{i=1}^l C_i,$$

qui consiste en une partie compacte  $K$  et un nombre fini de cusps  $C_i$ , qui portent des métriques hyperboliques  $\mathbf{h}_i$  et  $\mathbf{h}'_i$  telles que

- $F$ ,  $\mathbf{h}_i$  et  $\mathbf{h}'_i$  ont les mêmes géodésiques  $C_i$ , à paramétrisation près ;
- $\frac{1}{C}\mathbf{h}_i \leq \mathbf{h}'_i \leq F \leq \mathbf{h}_i \leq C\mathbf{h}'_i$ .

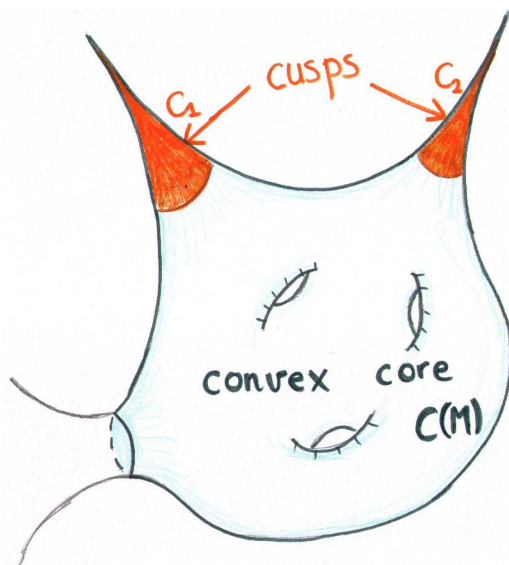


FIGURE 9. Géométrie d'une surface géométriquement finie

Il est alors facile de travailler avec des surfaces géométriquement finies : elles sont réunion d'une partie compacte, d'un nombre fini de cusps et d'un nombre fini de trompettes (c.f. figure 5.2.2) ; et en ce qui concerne le flot géodésique, on est soit dans une partie compacte, soit dans une partie dans laquelle la géométrie est contrôlée, et ce aussi précisément que l'on veut.

De cela, on peut déduire plusieurs résultats.

**Théorème 5.6.** — *Soit  $M = \Omega/\Gamma$  une surface géométriquement finie. Alors*

- le flot géodésique est uniformément hyperbolique sur l'ensemble non errant ; en particulier, il n'a pas d'exposant de Lyapunov nul ;
- il existe une mesure de Bowen-Margulis qui est de probabilité.

Ce théorème implique en particulier que les résultats dynamiques précédents sont applicables dans le cas des surfaces géométriquement finies. On peut ainsi déduire un résultat de rigidité entropique pour les surfaces de volume fini, qui sont ces surfaces géométriquement finies sans trompettes, de telle façon que le cœur convexe est  $HM$  tout entier.

**Théorème 5.7.** — *Soit  $M = \Omega/\Gamma$  une surface de volume fini. L'entropie topologique  $h_{top}$  du flot géodésique sur  $HM$  est inférieure à 1, avec égalité si et seulement si  $M$  est riemannienne hyperbolique.*

**5.3. Entropie volumique.** — L'entropie volumique  $h_{vol}(\Omega)$  d'une géométrie de Hilbert  $(\Omega, d_\Omega)$  mesure le taux exponentiel de croissance du volume des boules métriques de  $(\Omega, d_\Omega)$  :

$$h_{vol}(\Omega) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \log \text{vol}(B(o, R)).$$

Lorsque  $\Omega$  admet un quotient compact, on peut adapter facilement une preuve de Manning pour voir qu'entropies topologique et volumique coïncident :  $h_{vol} = h_{top}$ . Pour une variété de volume fini, cette égalité peut être fautive en courbure négative et cela dépend fortement de la géométrie asymptotique des cusps. En dimension 2, le théorème 5.6 permet de prouver que l'égalité a toujours lieu dans notre cas ; en résumé :

**Théorème 5.8.** — *Soit  $M = \Omega/\Gamma$  une variété compacte ou une surface de volume fini. Alors*

$$h_{top} = h_{vol}(\Omega).$$

Le théorème de rigidité entropique admet alors le corollaire suivant, qui confirme, dans certains cas, une conjecture affirmant que l'entropie volumique d'une géométrie de Hilbert est toujours majorée par  $n - 1$ .

**Corollaire 5.9.** — *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}\mathbb{P}^n$  tel que soit*

- $\Omega$  admet un quotient compact ;
- $n = 2$  et  $\Omega$  admet un quotient de volume fini.

*Alors  $h_{vol}(\Omega) \leq n - 1$ , avec égalité si et seulement si  $\Omega$  est un ellipsoïde.*